平成１０年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物 理 学 専 攻

筆 答 試 験 問 題

《平成９年８月２６日（火）、２７日（水）実施》

東北大学大学院理学研究科物理学専攻

物理学 I

問題１と問題２は別々の解答用紙に解答せよ。

問題１

自己インダクタンスＬのコイル、電気容量Ｃのコンデンサー、電気抵抗Ｒの抵抗、電圧Ｖの直流電源、スイッチＳが下図1~3 のように接続されている回路がある。時刻 $t=0$ でスイッチを入れるとき、次の問に答えよ。

1) 図1 の回路において時刻 t でのコンデンサーに蓄えられている電気量 $Q(t)$ を求めよ。また、$Q(t)$ の概略を図示せよ。さらに、$Q(\infty)$ の値と $Q(\infty)/2$ になる時刻 t を求め、それらを図に記入せよ。ただし、$t=0$ で $Q=0$ とする。

2) 図2 の回路において時刻 t での回路に流れる電流 $I(t)$ を求めよ。また、$I(t)$ の概略を図示せよ。さらに、$I(\infty)$ の値と $I(\infty)/2$ になる時刻 t を求め、それらを図に記入せよ。ただし、$t=0$ で $I=0$ とする。

3) 図3 の回路において時刻 $t=0$ でコンデンサーに蓄えられている電気量 $Q=Q_0$、回路に流れる電流 $I=0$ とするとき、

   a) 時刻 t でのコンデンサーに蓄えられている電気量 $Q(t)$ の満たす方程式をＲとＬとＣを用いて表わせ。

   b) 問 a) の方程式において $R=0$ としたときに $Q(t)$ を求めよ。また、$Q(t)$ の概略を図示せよ。

   c) $R\neq0$ のときはＲと $2\sqrt{L/C}$ の大小関係により $Q(t)$ の振舞いは異なる。各々の条件に対する $Q(t)$ を求めよ。また、$Q(t)$ の概略を図示し、その特色を簡単に述べよ。

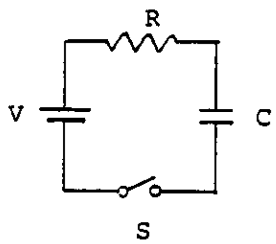


図１

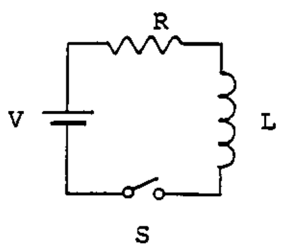


図２

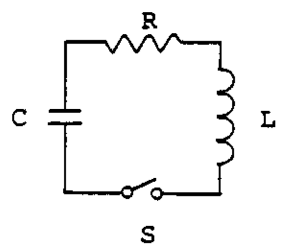


図３

問題２

□

真空中で一様な磁束密度 $\vec{B}=(0,0,B)$, 電場 $\vec{E}=(E_x,0,E_z)$ の下での荷電粒子（電荷 q, 質量 m）の運動を考える。この粒子が原点から初速度 $\vec{v}_0=(v_{0x},v_{0y},v_{0z})$ で打ち出され、時間 t 経過した時の座標を $(x(t),y(t),z(t))$, 速度を $\vec{v}(t)=(v_x(t),v_y(t),v_z(t))$ とする。以下の各問に答えよ。ただし $B\neq0$ とし、相対論的効果は無視できるものとする。解答用紙のはじめに用いる単位系を明記すること。

1）粒子の運動方程式を x, y, z 成分ごとに書き下せ。

2）$z(t)$ と $v_z(t)$ を求めよ。

3）粒子が等速直線運動をするために必要な条件を求めよ。またこの条件が満たされるときの $(x(t), y(t), z(t))$ を求めよ。

4）$\vec{E}=0$ の時、$|\vec{v}(t)|=|\vec{v}_0|$ となることを示せ。特に $v_{0x}=0$ のとき $(x(t), y(t))$ を求め、粒子の軌道を図示せよ。

5）$\vec{E}=(E_x,0,0)$, $\vec{v}_0=(0,v_{0y},0)$ の時、$(x(t), y(t))$ を求め、粒子の運動を図で説明せよ。また $t\to\infty$ での $\tan^{-1}(y/x)$ の極限値を求めよ。q の符号が逆の時この値はどうなるか。ただし B, E_x は正とする。

物理学Ⅱ

問題１と問題２は別々の解答用紙に解答せよ

問題１

N 個の調和振動子の集団の統計力学を考える。角振動数 ω の調和振動子のエネルギー準位 $\varepsilon_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ を用いると、１個の調和振動子の分配関数（状態和）は

$$z_0(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right)$$

で与えられる（$\hbar$ = (プランク定数)/(2π)、 k はボルツマン定数）。従って、全体系の分配関数は $Z = (z_0)^N$ となる。

以下の問題のうち、問４)、５)、８) では図の横軸（温度軸）に特性温度 $\Theta = \hbar\omega/k$ のだいたいの位置を示せ。

１）$z_0(T)$ を具体的に求めよ。

２）ヘルムホルツの自由エネルギー F(T) を求めよ。

３）エントロピー S(T) を求めよ。

４）内部エネルギー E(T) を求め、その概形を図示せよ。その際、絶対零度での値 E(0) を求め、縦軸（エネルギー軸）にその位置を明示せよ。

５）熱容量 $C(T) = dE/dT$ を求め、その概形を図示せよ。

高温極限（$T \gg \Theta$）では古典統計が成り立つ（実際には$T \geq \Theta$ の範囲で古典統計は良い近似である）。古典統計では系の内部エネルギーは $E_{cl}(T) = NkT$ となる。以下の問に答えよ。

６）$E_{cl}(T)$ の概形を点線を用いて問４）の図に重ね描きせよ。

７）熱容量の古典統計での表式を求め、問５）の図に点線で描き加えよ。さらに、熱容量が低温（$T < \Theta$）で古典統計と量子統計との間で食い違う理由を説明せよ。

８）熱力学によると、エントロピー S(T) と熱容量 C(T) の間には関係式 $dS/dT = C/T$ が成り立つ。熱容量が古典統計の表式で近似できる場合、エントロピーを温度の関数として求め、その概形を図示せよ。

当然のことながら、このエントロピーの低温に於ける振舞いは正しくない。正しい振舞いを推定し、同じ図に点線で描き加えよ。

問題2

結晶を入れた容器を真空に保持しながらある処理を行い清浄表面状態とする。排気を止めて、次に容器に取り付けられたコックから一定量の気体を導入すると、一部の気体分子は結晶表面に吸着する。この系は、表面に吸着した分子の系ー以下吸着分子系と呼ぶーとそれを取り巻く気体との間で分子の交換を許す弱い熱力学的結合を持つ系として扱うことができる。簡単のため、単原子分子の場合を考える。

まず、吸着分子系の熱力学的性質を正準集団に基づく統計力学によって扱う。吸着点の総数を $M\ (>>1)$ とし、吸着分子の数を $N\ (1<<N<M)$ とする。1個の分子の吸着エネルギーを $-\varepsilon\ (\varepsilon>0)$ とすれば、系のエネルギーは $E(N)=-N\varepsilon$ となる。N個の分子の吸着の仕方はいろいろ可能なので、その総数を $W_M(N)$ とすれば、この数は系のエネルギーの縮退度を与える。従って、系の分配関数（状態和）は次式で与えられる（k はボルツマン定数）。

$$Z(T,N)=W_M(N)\exp\left(-\frac{E(N)}{kT}\right) \qquad (1)$$

以下の問題で吸着率 f は $f=N/M$ で定義される量である。なお、スターリングの公式は次式で与えられる：$\log n!=n(\log n-1),\ n>>1$。

1）$W_M(N)$ を具体的に求め、その結果を用いて自由エネルギー $F(T,N)$ を計算せよ。

2）$F(T,N)$ を N で偏微分することにより吸着分子系における分子の化学ポテンシャル μ を求めると、μ は T と f の関数となる。その関数形を具体的に求めよ。さらに、吸着率が50%となる場合の μ の値を求めよ。

次に吸着分子系と気体との間の熱平衡を考える。

3）これ迄は吸着分子系の状態変数として T と N を用いて来たが、以下の問題では T と μ を用いるのが便利である。前問の関数を逆に解いて、$f\,(=N/M)$ を T と μ の関数として表せ。

4）気体が希薄で理想気体として扱える場合には、気体の圧力 P と化学ポテンシャル μ との間には次式が成り立つ（ m は原子の質量, $\hbar=$(プランク定数)/(2π)）。

$$\exp\left(-\frac{\mu}{kT}\right)=\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{kT}{P}\right) \qquad (2)$$

温度 T に於いて吸着率が50％となる場合の気体の圧力を系の特性圧力と呼び、$P_{1/2}(T)$ と表すことにする。特性圧力の温度依存性を具体的に求めよ。

□

5）問３）の結果と式（２）を用いて、吸着率を温度と圧力の関数として表せ。その際、特性圧力を用いて表式を簡単化せよ。次に、温度 T を一定として、吸着率の圧力依存性を図示せよ。その際、横軸（圧力軸）に特性圧力の位置を明示せよ。さらに、別な温度 T'（T' > T）に於ける吸着率の圧力依存性を同じ図に点線で描き入れよ。

6）単原子分子理想気体の１分子当たりのエンタルピー及び体積（分子容と呼ばれる）はそれぞれ $h = 5kT/2$ 及び $v = kT/P$ で与えられる。他方、吸着分子の１分子当たりのエンタルピーは $-\varepsilon$ に等しく、その分子容は無視出来る。これらのこととルシャトリエの原理を用いて、吸着率の温度変化及び圧力変化を議論せよ。

物理学 III

惑星の運動を記述するには，太陽が静止して惑星に力を及ぼしているという取扱いがよい近似を与える。一般に惑星に対する力が中心力の場合には，惑星は一平面内を運動する。この平面上の惑星の位置を，太陽を原点とする2次元極座標 (r, ϕ) で表すことにする。また，r, ϕ の時間微分をそれぞれ $\dot{r}, \dot{\phi}$ などと表す。惑星は質点とみなしてよいものとする。

1) 惑星に働く力がポテンシャル $V(r)$ で与えられるとき，惑星の運動方程式を r, ϕ を用いて書き表せ。

2) 角運動量の大きさ $J = mr^2\dot{\phi}$ が保存されることを示せ。

3) 惑星の運動エネルギーを極座標で表せ。これと前問の結果より，全エネルギー E を ϕ を用いずに

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)$$

と書いたとき，$U_{\text{eff}}(r)$ を求めよ。

4) 以後ポテンシャルが

$$V(r) = -\frac{g}{r^\alpha}\,, \qquad g > 0\,, \qquad 0 < \alpha < 2$$

で与えられる場合を考える。

角運動量 J の値を固定したとき，惑星の軌道はエネルギー E によっていろいろな形になる。U_{eff} と r の関係を図示し，軌道が有界になるような E の範囲を図中に示せ。

5) 軌道が円軌道の場合の軌道半径 $\bar{r}$ を角運動量 J の関数として求めよ。

6) 軌道がこの円軌道からわずかにはずれた場合を考え，$r = \bar{r} + \rho$ と書く。ρ, ϕ が式

$$\ddot{\rho} = (\alpha - 2)\,\frac{J^2}{m^2\bar{r}^4}\,\rho + \mathcal{O}(\rho^2)\,, \qquad \dot{\phi} = \frac{J}{m\bar{r}^2} + \mathcal{O}(\rho) \qquad (1)$$

をみたすことを示せ。

7) ρ の高次の項を無視して方程式 (1) を解き，軌道を表す式を導け。

8) 惑星に働く力がニュートンの万有引力の時，前問で求めた軌道が閉軌道（閉じた曲線）であることを示せ。また，仮に α が万有引力の値からわずかにはずれたとして，この軌道の近日点移動の大きさ（ある近日点と次の近日点の ϕ の差）を計算せよ。

物理学IV

問題1と問題2とは別々の解答用紙に解答せよ。

問題1

以下の設問に答えよ。

1) 質量 m の粒子の一次元問題を考える。

a) 粒子の座標を x、位置エネルギーを $V(x)$ で表す時、エネルギー E の固有状態の波動関数 $\psi(x)$ が従う Schrödinger 方程式を書け。

b) $V(x)$ が次式で与えられるような無限の深さをもつ幅 a の井戸型ポテンシャルであるとする。

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ 0 & (0 \leq x \leq a) \\ \infty & (x > a) \end{cases}$$

この時、エネルギー固有値 E を全て求めよ。

c) 解答用紙に井戸型ポテンシャルを画き（横軸 x、縦軸 $V(x)$）、その中に、基底状態、第一励起状態及び第二励起状態のエネルギーの位置を横線で書き込め。さらに、それぞれのエネルギー準位の位置に、x の関数としての波動関数の大まかな振る舞いを図示せよ。ただし、縦軸をそのまま波動関数の振幅を表す座標とし、各エネルギー準位の位置を、波動関数の値が零になるところに一致させるように図示するものとする。又、位相は無視して、波動関数は実数としてよい。

d) 次に、$V_0 > 0$ として、$V(x)$ が次のように与えられるとする。

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ -V_0 & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

束縛状態が存在するためには、a, m および V_0 の間に、ある条件が成り立たなければならない。その条件を不確定性関係を用いて近似的に導け。

2) 電子のスピンについて考える。

a) パウリのスピン行列の z 及び x 成分は

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる。これを用いて、スピンの x 成分の固有状態にある電子は、z 成分が上向きの成分と下向きの成分とを、半々に含んでいることを示せ。

b) $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$の間に成り立つ関係式を書き、$y$ 成分 σ_y を求めよ。

問題2

放物型ポテンシャル$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$に閉じこめられた質量$m$, 電荷$e$の1次元量子力学的粒子を考える。この系のハミルトニアン演算子は、pを運動量演算子として、$\mathcal{H} = p^2/(2m) + V(x)$である。エネルギー固有値$E_n$とエネルギー固有関数$\psi_n(x)$とは、$x_0 \equiv [\hbar/(m\omega)]^{1/2}$および$n = 0, 1, 2, \cdots$として

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \tag{1}$$

$$\psi_n(x) = N_n H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right] \tag{2}$$

で与えられる。ここで、$N_n = (\sqrt{\pi}2^n n! x_0)^{-1/2}$は規格化定数、$H_n$は、母関数展開

$$\exp(-s^2 + 2sz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(z) \tag{3}$$

で定義されるn次のHermite多項式である。以下の設問に答えよ。なお、解答にあたっては、

$$\int_0^{\infty} x^{2n}\exp(-x^2)dx = (2n-1)!!\,2^{-(n+1)}\sqrt{\pi}, \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ax^2 - ixy)dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{y^2}{4a}\right) \tag{5}$$

を用いてもよい。ただし、$(2n-1)!! \equiv (2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1$, $(-1)!! = 1$, $\mathrm{Re}\,a > 0$である。

1) 物理量Aの状態ψ_nでの平均値を$\langle A\rangle_n$で表す。Aの不確定度を$\Delta A \equiv \sqrt{\langle(A - \langle A\rangle_n)^2\rangle_n}$と定義したとき、状態$\psi_n$での位置と運動量との不確定積$\Delta x\Delta p$を計算せよ。
[ヒント] $\langle\mathcal{H}\rangle_n = \langle p^2\rangle_n/(2m) + \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2\rangle_n$および$\langle x^2\rangle_n = x_0^2\left(n + \frac{1}{2}\right)$を用いてもよい。

2) 第一励起状態ψ_1にある粒子が区間$(x, x+dx)$に見出される確率$P(x)dx$を計算し、$P(x)$の概形を(x, P)平面上に図示せよ。さらに、同じエネルギーを持つ古典力学的粒子について同様の確率$P_{\mathrm{cl}}(x)dx$を計算し、$P_{\mathrm{cl}}(x)$の概形を(x, P)平面上に重ね書きせよ。

3) 状態ψ_nの粒子にx方向の静電場$\mathcal{E}$がかかった場合を考える。

   a) 母関数展開(3)の両辺をsで微分することにより、$zH_n(z)$と$H_{n\pm1}(z)$との間に成り立つ式を導け。

   b) a)の結果と摂動法とを用いて、この粒子のエネルギー準位の変化量を2次の摂動項まで求めよ。

   c) この粒子のエネルギー準位の変化量の厳密解を求めよ。

4) 再び、静電場がかかっていない場合を考える。時刻$t = 0$に突然$V(x) \equiv 0$（任意のxで$V = 0$）になったとする。$t \leq 0$で基底状態にあった粒子の時刻$t \geq 0$での波動関数$\psi_0(x, t)$を、以下の順序に従って求めよ。

   a) 波動関数$\psi_0(x, t)$の空間座標xに関するFourier変換$\tilde{\psi}_0(k, t)$の満たす（$t \geq 0$での）時間発展常微分方程式を書き下せ。

b) $\tilde{\psi}_0(k,0)$ を計算し、上で求めた常微分方程式を解いて$\tilde{\psi}_0(k,t)$ を求めよ。

c) $\tilde{\psi}_0(k,t)$ を Fourier 逆変換して、$\psi_0(x,t)$ を求めよ。

d) $t \geq 0$ での位置の不確定度$\Delta x(t) \equiv \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle_0)^2 \rangle_0}$ を計算し、その時間変化の概略を $(t, \Delta x)$ 平面に図示せよ。

物理学Ｖ

♠ 物理学Ｖは５問のうちから２問を解答する選択問題です。

◇ 問題１から問題５の中から２問を選択して別々の解答用紙に解答しなさい。

♣ 問題２と問題４は問題用紙が２枚になっています。

♡ 解答用紙には選択した問題（例：物理学Ｖ　問題１）と受験番号を記入すること。

物理学 V
問題 1

1) ルジャンドルの微分方程式

$$\left[(1-w^2)\frac{d^2}{dw^2}-2w\frac{d}{dw}+\ell(\ell+1)\right]f(w)=0, \tag{1}$$

を考える。ここで ℓ は $\ell \geq 0$ の実数とする。

a) この方程式の解 $f(w)$ は $w=0$ で正則であり、

$$f(w)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n w^n \tag{2}$$

の形にテイラー展開できる。(2) 式の係数 f_n に対する漸化式を求め、解 $f(w)$ の $w=0$ まわりでの級数展開を求めよ。

b) 一般の ℓ では (1) 式の解は $w=\pm1$ でかならずしも有限ではない。この微分方程式の自明でない解で、$w=1$ と $w=-1$ の双方で有限なものが存在するための条件を ℓ について求めよ。

□

2) 湯川ポテンシャル $\Phi(\vec{r})$ に対する偏微分方程式

$$(\Delta-\mu^2)\Phi(\vec{r})=-\delta^{(3)}(\vec{r}), \qquad \mu>0, \qquad \vec{r}=(x,y,z),$$

を考えよう。ここで Δ および $\delta^{(3)}(\vec{r})$ は、

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad \delta^{(3)}(\vec{r})=\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

で与えられる。また、$\delta(x)$ はディラックの δ 関数を表す。ポテンシャル $\Phi(\vec{r})$ は十分に遠方で 0 となり、$|\vec{r}|\to\infty$ で境界条件 $\Phi(\vec{r})\to 0$ を満たすものとする。以下ではこのような $\Phi(\vec{r})$ の解をフーリエ変換を用いて求めてみよう。

a) $\Phi(\vec{r})$ のフーリエ変換 $\tilde{\Phi}(\vec{k})$ は

$$\tilde{\Phi}(\vec{k})=\iiint \Phi(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}dxdydz$$

で定義される。$\tilde{\Phi}(\vec{k})$ が

$$\tilde{\Phi}(\vec{k})=\frac{1}{|\vec{k}|^2+\mu^2} \tag{3}$$

で与えられることを示せ。

b) (3) 式をフーリエ逆変換することにより、湯川ポテンシャル $\Phi(\vec{r})$ を求めよ。

物理学V

問題2

動物が肺呼吸で吸入した酸素が、どれくらいの時間でどれだけ脳に達するかを調べたい。そのために、放射性同位元素の^{15}O を人工的に作り、これを含む酸素をサルに吸入させ、^{15}O の崩壊により発生するγ線を検出する実験を行なった。図のように2台の NaI シンチレーションカウンターを脳をはさむように設置し、2つのγ線の同時計測を行なった。

以下の問題に答えよ。

1) ^{15}O 核はβ^+崩壊（陽電子放出ベータ崩壊）によって陽電子を放出する。この崩壊の反応式を書け。

2) 放出された陽電子は物質中で直ちに静止し、消滅して通常2つのγ線を放出する。このとき、2つのγ線は互いにどういう方向に出るか、またそのγ線のエネルギーはいくらか。理由をつけて答えよ。

3) NaI シンチレーションカウンターの波高分布（エネルギースペクトル）はどうなるか。理由をつけて図示せよ。なお、^{15}O の崩壊では 2) で述べた以外のγ線は出ないものとする。

4) ^{15}O を含んだ酸素をサルに吸入させて 1.0×10^7個の^{15}O を体内に取り込ませたところ、吸入の 1.0 分後に NaI カウンターの同時計数率は 20 カウント/sec となった。以下の問 a)、b) に有効数字1桁で答えよ。

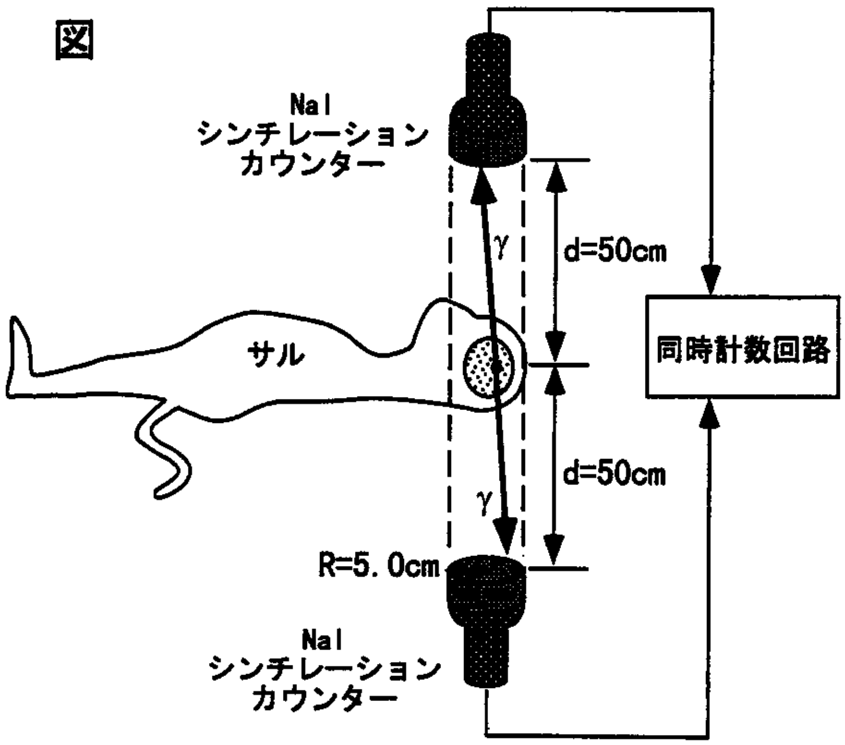
   a) 1.0×10^7個の^{15}O は 1.0 分後に何個になっているか。また、その時点での崩壊率は何ベクレル (Bq, 1秒あたりの崩壊数) か。

   b) この実験結果から、吸入1分後には、体内に取り込んだ酸素の約何%が脳に存在することがわかるか。

   なお、^{15}O のβ^+崩壊の半減期は $T_{1/2}$= 2.0 分 (平均寿命は $\tau = T_{1/2}/\ln 2 = 2.9$ 分) である。また、図のように脳でγ線が発生したときには、一方のγ線が一方のカウンターに入れば他方のγ線も他方のカウンターに入るものとし、また脳以外の部分で発生したときは、2つのγ線が両方ともカウンターに入ることはないものとする。図のように、脳から NaI カウンターまでの距離は d = 50 cm、NaI カウンターは半径 R = 5.0 cm の円筒型で円型の断面が脳に面している。また NaI カウンターにγ線が入射したときの検出効率は 100%としてよい。計算上必要ならば、脳の大きさは十分小さい（点状）とみなしてよい。

5) ^{15}O を人工的に作るには、加速器で陽子を加速して^{15}N 標的に当てる。陽子加速器の種類を一つ挙げ、その動作原理を簡単に説明せよ。

図


NaI
シンチレーション
カウンター
γ
d=50cm
サル
同時計数回路
d=50cm
γ
R=5.0cm
NaI
シンチレーション
カウンター

物理学V

問題３

１８７３年に書かれた学位論文の中で、van der Waals は理想気体の状態方程式を改良し、実在気体の液化、すなわち凝縮を定性的に記述し得る方程式を提出した。当時未だ実現していなかったヘリウムの液化を目指して、この方程式によって臨界状態を予見した彼の功績は極めて大きい。１モルの気体について、van der Waals の状態方程式は次のように書ける。

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$$

ここで、P、V、T、R はそれぞれ圧力、体積、絶対温度、気体定数である。また a, b は気体の種類によって決まるパラメタである。なお, 今日の統計力学の立場から見れば, これは相転移の最も簡単な理論(本質的に分子場近似)になっている。

１）a) 分子間ポテンシャルの概略を分子間距離 r の関数として図示せよ。
　 b) パラメタ a, b は分子間ポテンシャルのどのような特徴を反映しているかを説明せよ。

２）a) 縦軸をP、横軸をV として, T を適当に変えて臨界温度付近でのvan der Waalsの状態方程式の概略を図示せよ。
　 b) 熱平衡状態で実現する気体・液体共存領域でのP とV の関係を図示せよ。
　 c) 均質な状態としては物質が存在しえないP, V の領域を図示せよ。

３）臨界温度 T_c , 臨界圧力 P_c , 臨界体積 V_c を a, b を用いて表わせ。

４）ヘリウムが最も液化しにくい物質であるのはなぜか？　パラメタ a, b を用いて説明せよ。

５）実在気体に対する実用的な状態方程式として、以下のようなヴィリアル展開がよく用いられる。１モルの気体について、

$$PV=RT\left\{1+\frac{A_2}{V}+\frac{A_3}{V^2}+\cdots\right\}$$

ここで A_2、A_3 などはヴィリアル係数と呼ばれる。
a) van der Waals の状態方程式から第２ヴィリアル係数A_2 をもとめよ。
b) A_2 の温度依存性の物理的意味を説明せよ。

物理学V
問題4

□

今，同種の磁性イオンふたつからなる系を考える。この磁性イオンペアのz軸方向に磁場 H を加えた時の系のハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$\mathcal{H} = -2J\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \frac{g\mu_B}{\hbar}(s_{1z} + s_{2z})H \qquad (1)$$

ここで、$\vec{s}_1, \vec{s}_2$ は磁性イオン1, 2のスピン演算子、μ_B はボーア磁子、$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったもの、J（<0）は交換相互作用定数である。このとき以下の問に答えよ。また,この磁性イオンでは、軌道磁気モーメントが小さく、スピンだけを考えればよいものとする。

1) 磁性イオンのスピンが1/2で、$H=0$ のとき、上記のハミルトニアン(1)の固有値と、それぞれの固有値の縮重度を求めよ。（ヒント $\vec{S}=\vec{s}_1+\vec{s}_2$ を利用すれば固有値は求まる）
2) この系に磁場を加えたときの固有値の磁場依存性を、横軸に磁場、縦軸にエネルギーを取り図示せよ。

次に、この磁性イオンペアの集合からなる磁性体を考える。このとき異なったペアの間の相互作用は無視出来るものとする。

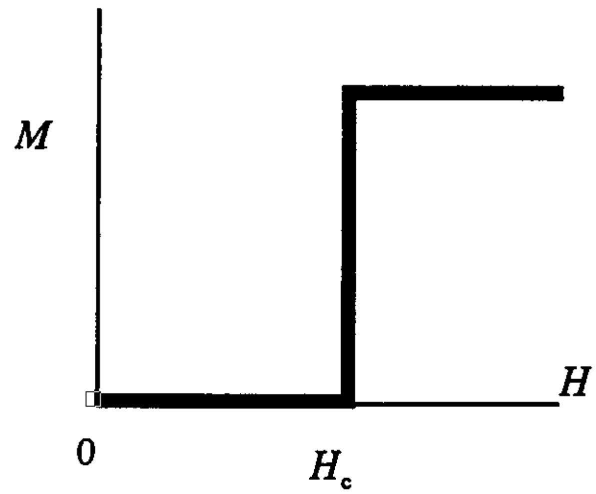
3) いま、低温でこの磁性体に磁場を加えたところ、図1のような磁化 M の変化が観測された。一般に、磁化測定の方法をひとつあげ、その原理を簡単に説明せよ。
4) この磁化の変化はなぜおこるか、問2）の結果を用いて説明せよ。また図1の H_c を問2）の答えの図に矢印で示せ。
5) J の値を H_c、g を用いてあらわせ。
6) 図1のような、シャープな磁化のとびが観測されるためには、温度と J の間にいかなる関係が必要か。
7) 実際の磁性イオンでは、軌道磁気モーメントが完全にゼロでなく、式(1)の g は自由電子の2.0よりずれる。この g を測定する方法に電子スピン共鳴がある。いま周波数 ν のマイクロ波を用いるとして、共鳴条件の式を記せ。また共鳴磁場が、H_1 のときこの磁性体の g を求めよ。
8) 上記の実験を液体ヘリウム温度付近で行うとき、温度計として用いるのが適当なものをふたつあげ、それぞれの温度計において温度を決める時用いる物理量の温

度依存性を定性的に図示せよ。（関数形は厳密でなくても、温度に対する傾向がわかればよい）

9) このような実験を行うには一般に低温が必要である。低温を生成する方法をひとつあげその原理を簡潔に述べよ。

10) この実験には強い磁場が必要であるが、そのようなとき超伝導体の磁石が用いられる。超伝導体の電気抵抗の温度変化を超伝導を示さない金属の場合とともに定性的に図示せよ。

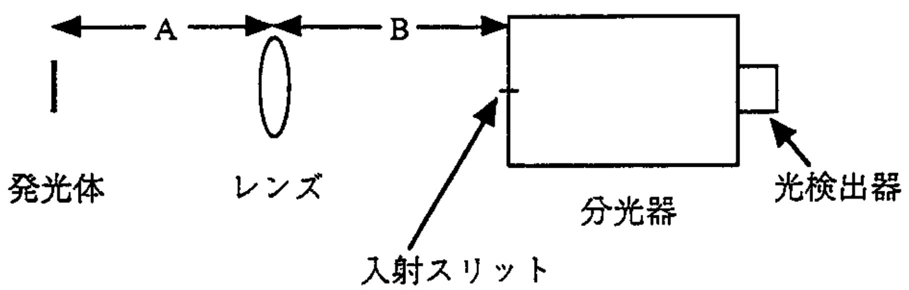
図 1



物理学V

問題5

下図のような光学配置でフィルム状発光体のスペクトルを測定する。



1）分光器の入射スリットを通過した光は立体角をもって拡がる。その光を凹面回折格子で分光する場合、凹面回折格子の有効直径で焦点距離を割った値を分光器のf値といい、$1/f^2$ は分光器の明るさを表わす。f値が7.5の分光器の回折格子を有効に利用し、発光体の像を入射スリット上に結ばせるためには、発光体からレンズまでの距離Aとレンズから入射スリットまでの距離Bを何cmにすればよいか。ただし、レンズの焦点距離Fは10cm、直径は4cmとする。

ヒント：$1/A + 1/B = 1/F$ の式を用いよ。

2）逆分散が5nm/mmの分光器で入射スリット幅を0.1mmとした場合、500nmの光に対する分解能はいくらか。

3）単レンズを使った場合、光の波長によって焦点の位置が異なる。その理由を簡単に述べよ。

4）5mm×5mmの面積をもつ発光体で場所によりスペクトル形状が異なる場合、0.2mmぐらいまで区別して測りたい。どのような方法で測定したらよいか。簡単に述べよ。

英語

<u>問題1と問題2とは別々の解答用紙に解答せよ。</u>

問題1

次の文章を読み、問いに答えよ。

The scientific method

The term science refers to much more than a body of knowledge considered as a mere collection of facts. It refers to a body of models and generalizations that systematizes and correlates observed facts and from which predictions can be made that may be compared with later observation or experiment. An accepted scientific conceptual scheme is usually called a theory. A theory is never proved. (I)<u>A theory is considered to be a valid model of reality if it correlates in fertile fashion a considerable body of facts and if no one happens to disprove it by finding a fact in contradiction with its predictions.</u> Because of this characteristic of a scientific theory, (II)<u>there is always the chance that the best-established theory will someday be confronted with facts inconsistent with its predictions and will have to be revised, corrected, refined or even abandoned.</u>

. . . .　□

Science starts, then, with the systematic recording of facts—accurate, well-defined, and in physics, quantitative facts. The scientist then essentially speculates; he mulls over the facts, trying to make order out of them, trying to relate them to each other and to other prediction. He develops alternative working hypothesis capable of prediction. These hypotheses are provisional conjectures designed to guide further investigation. A hypothesis is incorporated into scientific theory only when it has been empirically verified in many ways. It falls if its predictions are contradicted by observation.

注：fertile=実り多い；mulls over=いろいろと考える

Thus, in 16th century, the Danish astronomer Tycho Brahe observed and plotted the positions of the planets in great detail, collecting facts. From these data, the German astronomer Johann Kepler showed that the planets moved in ellipses with the sun at one focus and with speeds predictable by laws. This was scientific progress since future positions of the planets could be predicted, and the predictions were verified. Then, late in the 17th century, the British scientist Sir Isaac Newton made much more substantial progress with his beautifully simple principles of mechanics and gravitation which enabled prediction of the motion not only of the planets but of the moon and of the apples that fell from his tree, and which would have been refuted did not the planets move in ellipses at Kepler's speeds. Newton's principles stood the test of time until this century, when discrepancies from their predictions led to the development of relativity theory and of quantum theory, which are in a sense refinements of Newton's theories since they give Newton's results under ordinary circumstances, but depart from Newton's predictions in the cases of the extremely high speeds and the extremely small particles encountered in atomic and nuclear physics. These later theories are in no sense yet completely satisfactory; minor discrepancies still exist and the final theory of the atom has not yet been devised. But Newton's principles will probably always be useful in predicting the motions of machines and of vehicles, since predictions from these principles agree with experiment on bodies of ordinary size and speed within any accuracy of observation obtainable at present.

(III)<u>The general procedure of science is excellently illustrated by the above example.</u>

. . . .

(Shortley, G. & Williams, D., Principles of College Physics, 2nd ed.)

注：provisional conjectures＝暫定的な推測

1) 下線部(I)を和訳せよ。

2) 下線部(II)を和訳せよ。

3) 下線部(III)について、the general procedure of science とは何か？３つのステップに分け、それぞれについて日本語で説明し、さらに上記文中から各ステップに対応する事例を日本語で記せ。

問題2

次の文章を英訳せよ。

□

もし自分の意志を英語で表現したいなら、英語で書かれたいわゆるよい文章をたくさん覚えることは助けになるだろう。しかし、日本語でうまく言い表せないことを英語でうまく言えるはずがないということをも銘記しておく必要がある。だから、英語でどう言うかを考える前に、何を言いたいのかをはっきりさせねばならない。