平成１０年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験（２次）

物　理　学　専　攻

筆　　答　　試　　験　　問　　題

《平成１０年２月１９日（木）実施》

東北大学大学院理学研究科物理学専攻

物理学 I

解答する前に用いる単位系を記すこと。

問題1

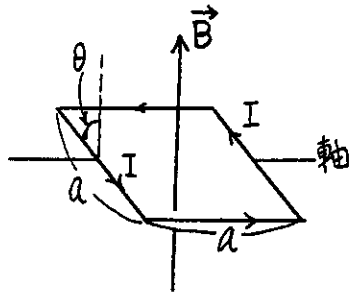
次の各問いに答えよ。

1）真空中で一般に電流、電荷が存在する場合のMaxwellの方程式（４つ）を書け。
また各式について物理的意味又は関連する物理現象（法則）を簡潔に述べよ。

2）電荷も導体も存在しないときの真空中での電磁波（電場$\vec{E}$と磁場$\vec{H}$について）の方程式を導け。

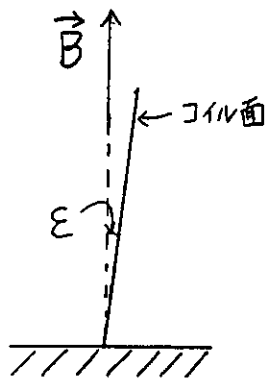
問題2

真空中で、鉛直上向きの一様な磁束密度$\vec{B}$の磁界中に置かれた、正方形の平面コイルを考える。コイルの一辺の長さをａ、コイル面と$\vec{B}$のなす角をθとして次の問いに答えよ。ただしコイルの自己インダクタンスによる効果は無視できるものとする。



1）図のように一組の対辺の中点を水平な軸で支え、コイルに電流Ｉを流すとき磁界からコイルが受けるトルクＮを求めよ。

2）前問で、電流を流すのをやめた後、コイルを軸の回りに角速度ωで回転させる時、時刻ｔでコイルに流れる電流の大きさを求めよ。ただしコイルの抵抗をＲとしｔ＝０でθ＝０とする。



3）コイルを軸からはずし、この磁界中の水平で滑らない台上に一辺を底辺とし、コイル面を鉛直から小さな角εだけ傾けた状態にして置いた後のコイルの振る舞いを、θについての運動方程式で表せ。またθを時間ｔの関数として$\vec{B}$＝０の場合と比較しながら簡単に図を用いて説明せよ。ただしコイルの質量をm、重力加速度をｇとする。

物理学Ⅱ

問題1

フェルミ統計に従う粒子から成る理想気体の統計力学に関する以下の問に答えよ．粒子のエネルギー準位のスピン縮重度は無視してもよい．また、系の体積をVとし、粒子の質量を m とする．

1）化学ポテンシャルを μ とした場合に、フェルミ分布関数 $f(\varepsilon)$（ε は粒子のエネルギー）の表式を記せ．ただし、系の温度を T として $\beta = (k_B T)^{-1}$ とせよ．

2）$f(\varepsilon)$ の値がある条件を満たせば $f(\varepsilon)$ は古典統計のボルツマン分布関数で近似できる．その条件を示すと共にその理由を記せ．また、ボルツマン分布関数を記せ．

3）運動量 $\mathbf{p}$ の粒子のエネルギーが $\varepsilon = \dfrac{\mathbf{p}^2}{2m}$ で与えられる場合について、この系が古典統計で扱えるための条件を T と μ を用いて示せ．

4）古典統計（ボルツマン分布関数）を用いて、粒子の数密度 $n = N/V$ を T と μ の関数として求めよ．また、古典統計が正当化されるための数密度　n に対する条件を記し、その物理的意味を粒子の波動性に関連づけて説明せよ．

5）前問と同じく古典統計を用いて、運動量 $\mathbf{p}$ の粒子のエネルギーが $\varepsilon = \Delta + \dfrac{\mathbf{p}^2}{2m}$ で与えられる場合について、μ を T と N の関数として表せ．また、系のエネルギー E を T と N の関数として求めよ．

問題2

n 型半導体中の電子（負電荷のキャリヤー）を古典理想気体として扱い、その熱力学的性質を古典統計を用いて調べる．伝導帯（conduction band）が不均等な2つの谷（asymmetric double minimum）を持つ場合、エネルギーが次式で与えられる2種の粒子（キャリヤー）があるとして扱うことができる：

$$\text{i）}\ \varepsilon = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1}、\quad \text{ii）}\ \varepsilon = \Delta + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2}.$$

ただし、Δ（$\Delta > 0$）は2つの谷の間のエネルギー差を表す．現実には2つの谷は電子の異なったエネルギー固有状態を表すので、熱平衡状態では2種の「粒子」の化学ポテンシャルは等しい．熱平衡状態における2種の粒子の数を N_1、N_2 とし、全粒子数を $N = N_1 + N_2$ とする．また、系の体積を V とする．

以下の問では電子のエネルギー準位のスピン縮重度は無視してもよい．また、簡単のため $m_1 = m_2 = m$ となる場合について解答せよ．

1）比 N_2/N を温度の関数として求め、それを図示せよ．

2）全粒子数 N が固定されている条件で、系のエネルギー E を T と N の関数として求めよ．

3）系の定積熱容量を計算し、それを温度の関数として図示せよ．

物理学III

問題

1）次のような1次元のポテンシャル $V(x)$ の中の粒子の運動を考える。粒子の質量は m とする。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ V_0 & (0 \le x \le a) \\ 0 & (x > a) \end{cases} \tag{1}$$

a) ある定まったエネルギー E を持った粒子がポテンシャル $V(x)$ の中を運動している時の Schrödinger 方程式を書け。

b) 上のポテンシャルは、$x = 0$ と $x = a$ で有限のとびをもっているにもかかわらず、これらの点で、波動関数とその1階微分は連続である。波動関数の1階微分が連続になる理由を説明せよ。

c) このポテンシャルの障壁に、x 軸の負の方向から入射する粒子の透過係数を求め、エネルギーの関数としてどのように振舞うかその概略を図示せよ。ただし、$V_0 > 0$、$E > 0$ とする。

2）次にポテンシャルが、

$$V(x) = P\delta(x) \tag{2}$$

で与えられているときを考える。ここで、P は定数、$\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数である。

a) P の次元は何か。

b) この場合の透過係数を波動関数の接続条件に注意しながら求めよ。粒子の質量を m とせよ。

c) (1) で与えたポテンシャルが (2) のようなデルタ関数で近似できるのはどのような時か述べよ。さらに 1）c) の結果を用いて (2) のポテンシャルのもとでの透過係数を求め、それが、前問の答と一致することを確かめよ。

英語

問題

次の文章を読み、問いに答えよ。

The scanning tunneling microscope (STM) exploits the wave properties of electrons. In a vacuum, one positions a sharp probe so close to the surface of the sample that the wave functions of electrons in the probe overlap wave functions in the sample. Then a small voltage applied between probe and sample causes electrons to tunnel through the vacuum. The electron wave functions decrease exponentially with distance so the tunneling current is extremely sensitive to the separation of the tip and the surface. A change in this distance equal to the diameter of a single atom may cause a change of 1000:1 in tunneling current.

This sensitivity of tunneling current can yield exquisitely precise measurements of the vertical positions (to 0.01 angstroms) and horizontal positions (to 1 angstrom) of atoms in the sample's surface. As the tip scans a surface, a feedback mechanism senses the tunneling current and maintains the tip at a constant height above the surface. Motion of the tip is sensed and processed by a computer and displayed on a screen. Sweeping the tip through a pattern of parallel lines produces a three-dimensional image of the surface.

(I)<u>To check their apparatus and to convince sceptics, Rhorer and Binnig in 1983 investigated the surface of silicon. A surface layer is much rougher than any bulk layer, the surface atoms taking positions of minimum energy under the influence of supporting atoms. For the silicon surface the STM disclosed a pattern of diamond-shaped unit cells, each 27 angstroms on a side. Each unit cell contains twelve bumps arranged in two groups of six, never previously resolved, which apparently correspond to the surfaces of individual atoms.</u>

(II)<u>The STM can not only delineate the atomic topography of a surface but also reveal atomic composition. The tunneling current depends both on the tunnel distance and on the electronic structure unique to each atomic element.</u>

A wide range of applications awaits the STM. It can document the growth of regions of superconductivity as temperature is lowered. It may show causes of surface roughness in industrial materials and suggest ways to minimise energy loss in friction. It provides a direct and non-destructive way of viewing biological samples. It holds promise for encouraging specific chemical processes by tuning the energy of the beam to that required for the particular reaction. As components of electronic circuits continue to be miniaturised, in testing them the STM tip can serve both as a local voltage probe and a current source.

(Weber, R.L., Pioneers of Science: Nobel Prize Winners in Physics より)
注：exquisitely=非常に; angstrom=オングストローム; bump=こぶ; delineate=輪郭を描く。

□

1) 下線部(I)を和訳せよ。
2) 下線部(II)を和訳せよ。
3) ２重下線の記述を元にして、STMで見た場合の“unit cell”内における“bump”の並びかたを、“unit cell”を真上から見た時の略図で示せ。ただし、“unit cell”の頂角の一つは６０度とする。また、bumpは上から見て円とし、互いに接しているものとする。
4) 上の文章中でSTMの応用として考えられていることを3つ以上あげよ。