

平成11年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期2年の課程入学試験

物理学専攻

筆記試験問題

〈平成10年8月25日（火）・26日（水）実施〉

東北大学大学院理学研究科物理学専攻

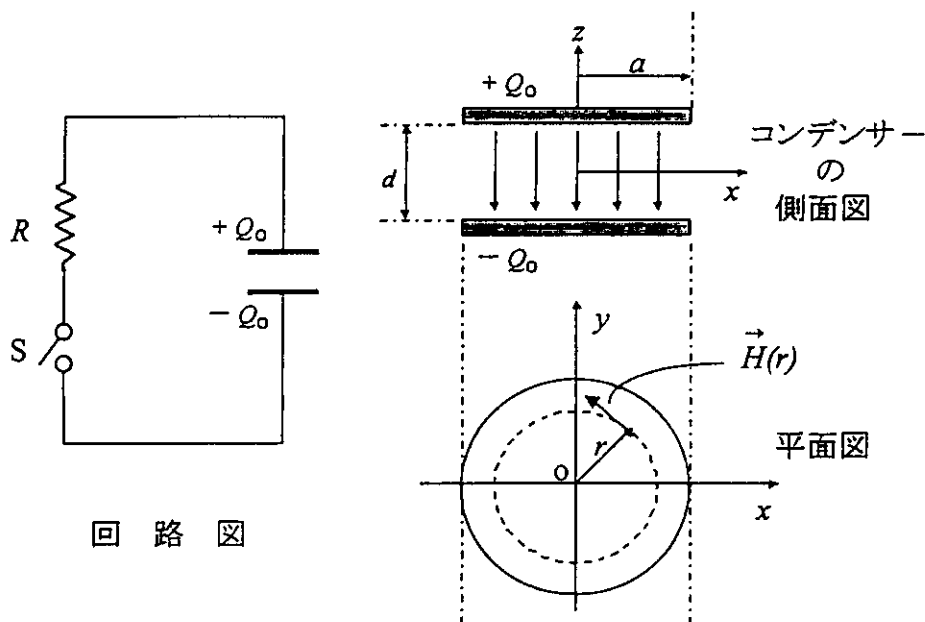
物理学 I

問題 1 と問題 2 は別々の解答用紙に解答せよ。

問題 1

変位電流密度 \vec{i}_d は電束密度 \vec{D} を時間で偏微分することにより $\vec{i}_d = \partial \vec{D} / \partial t$ として求められる。以下の設問においては空気の誘電率を ϵ 、透磁率を μ とする。

半径 a 、間隔 d ($d \ll a$) の平行平板コンデンサーの極板上に電荷 $\pm Q_0$ を一様に分布させる。このとき電極間に生じる電場は一様で極板の端での乱れはないものとする。充電したコンデンサーに抵抗 R および開状態のスイッチ S を下図のように直列に接続する。



1) このコンデンサーの容量 C を a , d , ϵ で表せ。

以下の設問では $t=0$ で S を閉じてコンデンサーを放電させた場合を考える。

- 2) t 秒後の電荷 $Q(t)$ および抵抗 R を流れる電流 $I(t)$ を求めよ。
- 3) 放電が完全に終了するまでに抵抗 R で消費される全エネルギーを求めよ。
- 4) 放電によって変化する電極間の電場 $\vec{E}(t)$ と変位電流密度 $\vec{i}_d(t)$ を求めよ。
- 5) 一様な密度の変位電流が z 軸に対して軸対称に流れているとする。
 - a) 極板間の半径 r ($0 \leq r \leq a$) の円周上における磁場の大きさ $H(r, t)$ と変位電流密度の大きさ $i_d(t)$ の関係を求めよ。
 - b) $H(r, t)$ の時間変化を求めて図示せよ。

物理学 I

問題 2

1) N 回巻きのコイルにおいて、磁束の洩れが無いとすれば、コイルの(自己)インダクタンス L は N^2 に比例することを示せ。

2) 図1に示した回路を考える。時刻 $t=0$ にスイッチ S を閉じた時、回路に流れる電流 I を時間の関数として求め図示せよ。

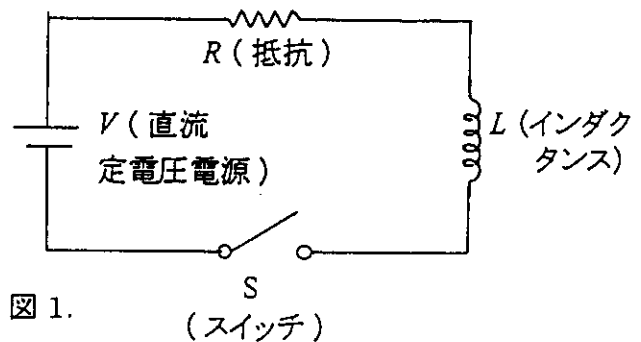


図 1.
(スイッチ)

3) 図2に示した変圧器を考える。ここで次の仮定をおく。

仮定1 「コイル電流によって生じた全

磁束が1次と2次の両方のコイルを貫く」

この時、この変圧器の相互インダクタンス M は

$$M^2 = L_1 \cdot L_2$$

となることを示せ。ただし、図に示されているように、 L_1, L_2 はそれぞれ1次側および2次側の自己インダクタンスである。

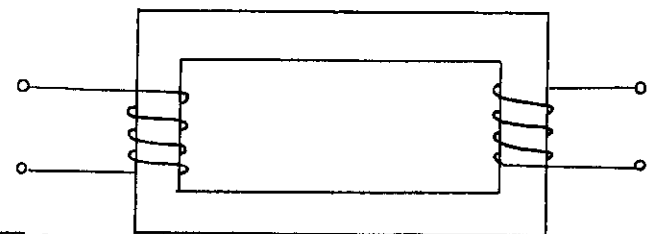


図 2.
1次側
コイル巻数 N_1
自己インダクタンス L_1
2次側
コイル巻数 N_2
自己インダクタンス L_2

4) 仮定1を満たす変圧器を用いて図3に示す回路を構成する。すなわち1次側は図1の回路であり2次側は短絡してある。時刻 $t=0$ にスイッチ S を閉じた時、1次側回路に流れる電流を時間の関数として求め図示せよ。

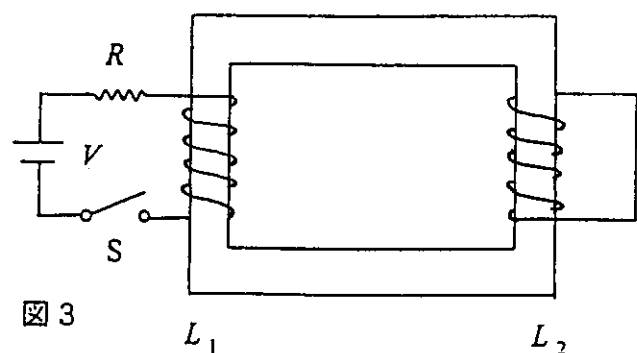


図 3
 L_1 L_2

5) 次の仮定を満たす変圧器を考える。

仮定2「 L_1, L_2, M が $M^2 = L_1 \cdot L_2$ の関係を保ちながら無限に大きくなる」
この仮定を満たす変圧器(理想変圧器)の1次側にインダクタンス L をつなぎ、2次側には容量 C のコンデンサーをつなぐ(図4)。

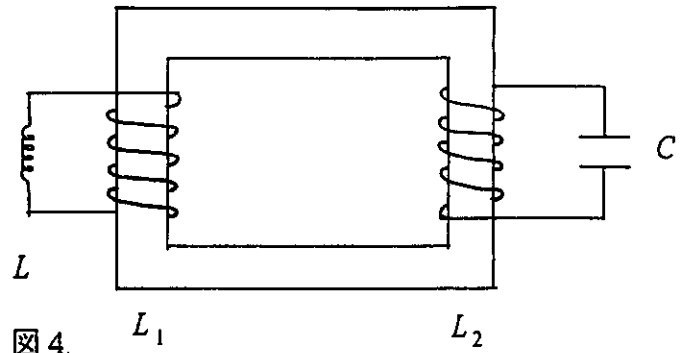


図4.

この回路の共振周波数を求めよ。

6) 変圧器においては1次側と2次側との間でエネルギーの移送が行われている。このエネルギーの流れをポインティング・ベクトルを用いて考えよう(図5)。

1次側での電流 $I_1(t)$ が $dI_1/dt > 0$ で変化している場合を例にとって、中間地点における電場ベクトル \vec{E} 、磁束密度ベクトル \vec{B} 、ポインティング・ベクトル \vec{S} がどのようになっているかを考察し、図示せよ。

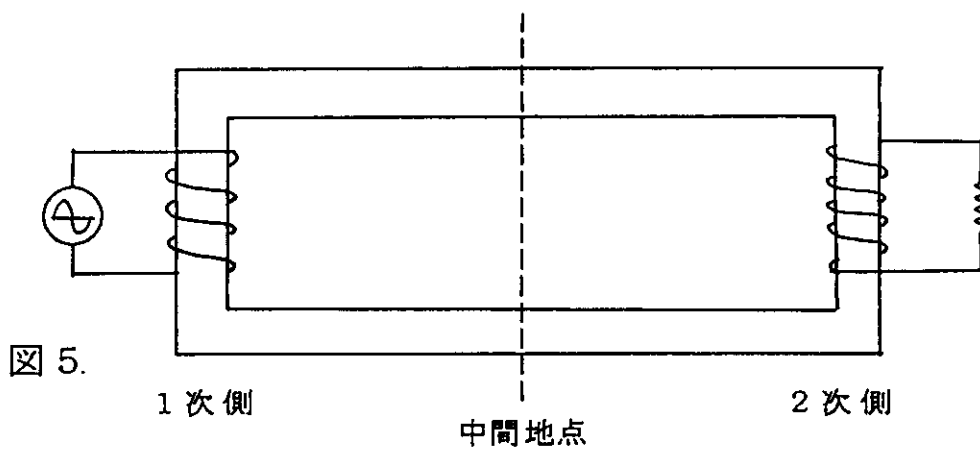


図5.

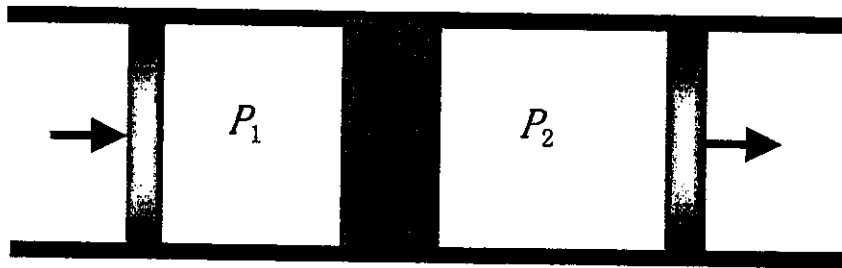
物理学 II

問題 1 と問題 2 は別々の解答用紙に解答せよ。

問題 1

□

図のように、圧力 P_1 の気体が多孔質でできた断熱隔壁を通して圧力 P_2 ($< P_1$) の容器に定常的に移る過程（ジュール・トムソン過程）について、以下の問に答えよ。ここに、定常的とは、この過程において P_1 と P_2 は常に一定であることを意味する。また、この系は外界から熱的に絶縁されており、気体は単原子からなるとする。



隔壁

- 1) 体積 V_1 の気体が押し出され、体積 V_2 をもつとする。この過程ではエンタルピー $H = E + PV$ が保存されることを示せ。ここに、 E は気体の内部エネルギーである。
- 2) この過程でのエントロピー S の変化は $(\partial S / \partial P)_H$ で与えられる。これを用いて、この過程が本質的に非可逆過程であることを示せ。
- 3) エンタルピー一定のもとで温度 T の圧力 P に関する偏微分をジュール・トムソン係数 μ_H という。次式を証明せよ。

$$\mu_H \equiv (\partial T / \partial P)_H = \frac{1}{C_P} [T(\partial V / \partial T)_P - V]$$

ここに、 $C_P = (\partial H / \partial T)_P$ は気体の定圧比熱である。

4) 気体の状態方程式を

$$PV = RT + B(T)P$$

と近似しよう。ここに、 R は気体定数、 $B(T)$ は第2ビリアル係数と呼ばれ、気体を構成する原子間に働く2体相互作用 $U_{12}(r)$ を用いて次のように表わせる。

$$B(T) = \frac{1}{2} \int (1 - e^{-U_{12}(r)/T}) d^3r$$

- a) 相互作用 U_{12} の原子間距離依存性を原子の平均半径 r_0 を用いて定性的に図示し、その特徴を述べよ。
- b) μ_H を $B(T)$ を用いて表わせ。
- c) 高温極限と低温極限で、 μ_H の符号を調べよ。
- d) 以上の結果からジュール・トムソン過程が気体を液化する原理となることを説明せよ。

問題 2

結晶格子があり、各格子点に一個ずつ磁性イオンを含むとする。この磁性イオンは角運動量の磁気量子数の自由度に対応して、三つの状態をもつとする。格子が立方格子から変形していないときには三つの状態のエネルギーは縮退している。格子が立方格子から変形したとき、これらの状態のエネルギーは分裂して、次のようになるとする。

エネルギー $E_1 = -2\alpha Q$ (状態の個数は 1)

エネルギー $E_2 = \alpha Q$ (状態の個数は 2).

ただし、 Q は格子の変形の大きさをあらわすある無次元な量であり、また α はエネルギーの次元をもつ定数である。この格子に含まれるイオンの数を N 個として以下の問いに答えよ。

1) 温度を T 、ボルツマン定数を k とする。与えられた変形 Q のもとでこのイオン系の分配関数 Z_1 と自由エネルギー F_1 の式を与えよ。

2) Q は小さく、 $|\alpha Q| \ll kT$ の条件が成立するとする。このとき、自由エネルギーの式を $O(Q^2)$ まで求めると次のようになる。

$$F_1 = -kTNX_1 - N\frac{X_2}{kT}Q^2 \quad (1)$$

ここで、 X_1 、 X_2 は温度に依存せず、正の値を持った因子である。 X_1 と X_2 を求めよ。

3) kX_1 がどのような熱力学量に対応するか簡略に説明せよ。

4) 変形に伴って格子の変形による自由エネルギーは上昇する。この自由エネルギー F_L を Q の 4 次の冪までの近似であらわすと次のようになる。

$$F_L = N(b_1Q + b_2Q^2 + b_3Q^3 + b_4Q^4) \quad (2)$$

b_ℓ ($\ell = 1 \sim 4$) の温度依存性は無視出来るものとし、また $b_4 > 0$ とする。 F_L だけを考えて場合には変形のない状態、つまり $Q = 0$ が安定であるとする。このためには、 $b_1 = 0$ 、 $b_2 > 0$ の条件が必要である。理由を簡明に述べよ。

5) 仮に変形 Q が存在するとして、その場合の格子変形と磁性イオンの寄与を同時に考える。このような系の自由エネルギーは、 F_L と F_1 を加えて次のように与えられる。

$$F = F_L + F_1 \quad (3)$$

ただし、 F_1 については (1) の近似形の使用が許されるものとする。温度を低下させるとき、 F の式の Q^2 の係数の符号がどのように変化するか簡単に述べよ。

6) Q を dQ だけ等温可逆的に増加させるとき、この系に外からなされる仕事が $f dQ$ と与えられるとする。(f を Q に共役な一般化外力と呼ぶ。) f は T を固定した偏微分により $f = \frac{\partial F}{\partial Q}$ と与えられるが、その理由を 1~2 行程度で簡単に説明せよ。

7) f と Q の関係式は状態方程式と呼ばれる。これを $f = g(Q, T)$ とかくことにする。 $g(Q, T)$ を求めよ。ただし、(1) の形をそのまま使い、 X_1 、 X_2 の具体的な形は使用しなくてよい。

8) 温度一定での f と Q の関係 (等温線) について考える。格子変形の寄与だけを考えた場合の概略は図 1 の破線のようになる。つぎにイオンの寄与も取り入れた系について考える。充分高温から徐々に温度を下げる時、ある温度を境に図 1 の一点鎖線で示されるような関係に等温線が変化し、これにより熱力学的な性質に際立った変化がおきる。一点鎖線のような場合にはどのような現象が期待されるか。理由も含めて、簡略に説明せよ。

9) 破線から、一点鎖線の型への変化のおきる温度を求めるための条件式を与えよ。ただし、関数 $g(Q, T)$ は既知の関数であるとして使ってよく、実際の表式を代入する必要はない。また、条件式を実際に解いて、温度を定めることはしなくて良い。

10) 外力の値が f であるとき、異なった Q の値をもつふたつの相の共存の生じる場合がある。このようなことが生じるための熱力学的な条件式はなにか。その条件式を与えよ。ただし、実際にその式を解くことまではしなくてよい。

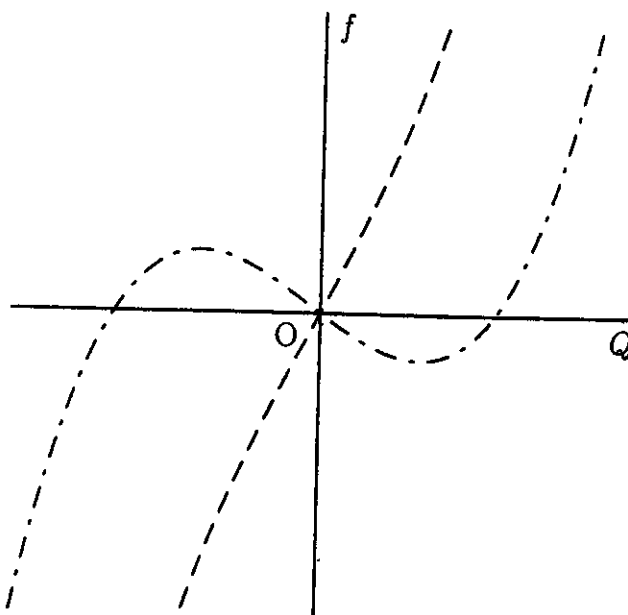


図 1. f と Q の等温線。破線は格子変形のみを考えた場合、一点鎖線はイオン系も含めた場合に低温で期待される形。

物理学III

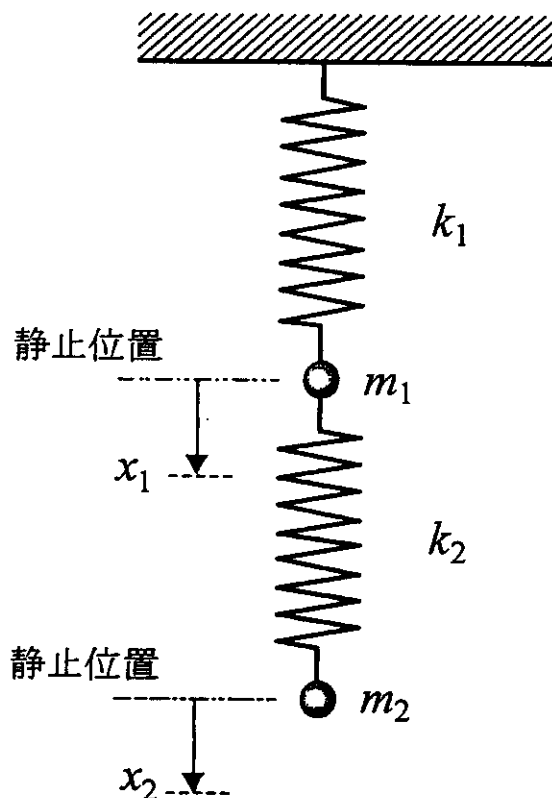
問題

固定点からバネ定数 k_1 のバネで質量 m_1 の小球をつるす。この小球にバネ定数 k_2 のバネをつるし、さらに質量 m_2 の別の小球をつるす。バネの質量および振動時の空気による抵抗や浮力および小球の大きさは考えなくても良い。また振動は鉛直方向のみとし、各静止位置からの変位をそれぞれ x_1, x_2 とする。重力の加速度の大きさを g とする。

- 1) 質量 m_2 の小球を静止位置から微小量 δ だけ下に引っ張った時、上の小球は静止位置からどれだけ変位するか。
- 2) この系の振動時における運動エネルギー T およびポテンシャルエネルギー U を求めよ。
- 3) ラグランジュ関数 L を導け。
- 4) ラグランジュ方程式から、各小球の運動方程式を導け。

以下においては、 $m_1=2m, m_2=m, k_1=2k, k_2=k$ の場合を考える。

- 5) この系の2つの基準振動数 ω_1, ω_2 を求めよ。
- 6) 下の小球を静止位置から微小量 δ だけ引っ張って、時刻 $t=0$ に放す。
 x_1, x_2 を t の関数として求めよ。



物理学 IV

問題 1 と問題 2 は別々の解答用紙に解答せよ。

問題 1

質量 m の粒子が次の一次元井戸型ポテンシャル中におかれたときの、量子状態を考えよう。

$$\begin{aligned} V(x) &= -V_0, & 0 < x < a, \\ &= 0, & x > a. \end{aligned}$$

$V_0 > 0$ であり、 $x \leq 0$ には無限に高い障壁があるものとする。

- 1) a) エネルギー E の固有状態に対するシュレディンガー方程式を書きなさい。
b) 波動関数の $x = 0$ での値を理由を述べて書きなさい。
- 2) 井戸に束縛された、エネルギー $E < 0$ の固有状態に対して、井戸の内部 $x < a$ と外部 $x > a$ での波動関数を求めなさい。規格化定数は求めなくてよい。
- 3) 井戸に束縛された粒子のエネルギー固有状態に対して、そのエネルギーが満たす方程式を導きなさい。
- 4) n ($n = 1, 2, 3, \dots$) 個の束縛状態が存在するための $V_0 a^2$ に対する条件を求めなさい。
- 5) エネルギー最低の基底状態、第一励起状態、第二励起状態の波動関数の概略を、井戸とともに描きなさい。下から n 番目にエネルギーが低い状態の波動関数の最も重要な特徴を一つだけ書きなさい。
- 6) エネルギー $E > 0$ の状態は、束縛状態と異なりエネルギーの値がとびとびの離散値にならず、連続値をとれる。どうしてかその理由を書きなさい。
- 7) 井戸のサイズを、 a から突然 $2a$ に変化させたとき、元の基底状態にある粒子がサイズ変化後の基底状態に留まる確率を、各々の波動関数、 $\psi_a(x), \psi_{2a}(x)$ を使って書き表しなさい。この確率を計算する必要はない。変化後のサイズが $2a$ より大きいとき、この確率はサイズが $2a$ のときより大きいか、小さいか、計算せずに理由を述べて答えなさい。

問題 2

3次元空間で原点を中心に等方的な調和振動をする質量 m の粒子のハミルトニアン H は、座標と運動量の演算子をそれぞれ (x, y, z) , (p_x, p_y, p_z) , 角速度を ω とすると

$$\begin{aligned} H &= H_x + H_y + H_z \\ H_\xi &= \frac{1}{2m} p_\xi^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \xi^2, \quad (\xi = x, y, z) \end{aligned} \quad (1)$$

と書ける。以下のような演算子

$$a_\xi = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (i p_\xi + m \omega \xi), \quad a_\xi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (-i p_\xi + m \omega \xi), \quad (\xi = x, y, z) \quad (2)$$

を使うと、ハミルトニアンの各項は $H_\xi = \hbar \omega (a_\xi^\dagger a_\xi + \frac{1}{2})$ と書ける。

- 1) 交換関係 $[a_x, a_x^\dagger] = 1$ を示し, $[H_x, a_x^\dagger]$ を求めよ。ただし, $[A, B] = AB - BA$.
- 2) 基底状態の波動関数は, $\Psi_0(x, y, z) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$ のように積で与えられる。ここで, $\psi_\xi(\xi)$ は H_ξ の最低固有値の波動関数であり, $a_\xi \psi_\xi(\xi) = 0$ ($\xi = x, y, z$) を満たす。
 - a) $\psi_x(x)$ に対する最低固有値条件を与える微分方程式を書き, 波動関数 $\psi_x(x)$ を求めよ。ただし, 規格化定数は求めなくて良い。
 - b) 基底状態の波動関数 $\Psi_0(x, y, z)$ とエネルギー固有値を求めよ。ただし, 規格化定数は求めなくて良い。
- 3) 等方的な系では, 軌道角運動量は保存する。このことは量子力学的には, 角運動量演算子がハミルトニアンと交換することであるが, 特にポテンシャル項と交換する事が必要である。このことを以下の問いに従って示せ。
 - a) z 軸方向の角運動量演算子 L_z の定義式を書き, 交換関係 $[L_z, x]$, $[L_z, y]$ を求めよ。
 - b) ポテンシャル項を $V = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2)$ と書くとき, $[L_z, V] = 0$ を示せ。ポテンシャル項 V は全ての座標について対称なので, これによって全ての方向の角運動量 L_ξ ($\xi = x, y, z$) と交換することが分かる。
- 4) 励起状態は, 基底状態に演算子 a_ξ^\dagger を作用させて作ることができる。
 - a) $a_x^\dagger \Psi_0$ のエネルギー固有値を求めよ。これは第一励起状態の一つである。
 - b) 第一励起状態の独立な波動関数を全て求め, L_z の固有関数を作り, それぞれの L_z の固有値を求めよ。ただし, 規格化定数は求めなくて良い。
 - c) $L^2 \Psi_0 = 0$ であることを使って, 第一励起状態が全て L^2 の同一固有値状態であることを示し, その固有値を書け。ただし, $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$. □

物理学 V

- ◎ 物理学 V は5問のうちから2問を解答する **選択問題** です。
- ◎ 問題1から問題5までの中から、**2問を選択** して別々の解答用紙に解答しなさい。
- ◎ 問題3、問題4、問題5は、それぞれ問題用紙が2枚になっています。
- ◎ 解答用紙には、選択した問題（例：物理学 V 問題1）と受験番号を記入すること。 □

物理学V

問題1

エネルギーがそれぞれ $\hbar\omega_1$ 、 $\hbar\omega_2$ の2つの量子状態1、2からなる2準位系を考える。この系に時刻 $t \geq 0$ で2つの状態の間の遷移を引き起こすような相互作用を加える。系のハミルトニアンは、行列を用いて、

$$H = \begin{pmatrix} \hbar\omega_1 & v(t) \\ v(t) & \hbar\omega_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

と書ける。ここに、 $v(t)$ は時刻 t の実関数であるとする。 $t < 0$ では $v(t) = 0$ である。

1) まず $\hbar\omega_1$ と $\hbar\omega_2$ が縮退している場合を考える。 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ とおく。

a) 行列 H の固有値と固有ベクトルを求めよ。さらに適当な直交行列 M と対角行列 H_D を用いて H を $H = MH_D M^{-1}$ の形に書け。

b) 前問の結果を利用して、シュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(t) = H \Psi(t), \quad \Psi(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

を解き、 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ を $\alpha(0)$ 、 $\beta(0)$ を用いて表せ。

c) $t = 0$ で状態1にあるとき、その後の時刻 $t (> 0)$ で状態2にある確率 $P(t)$ が

$$P(t) = \sin^2 \left(\frac{1}{\hbar} \int_0^t v(t') dt' \right) \quad (3)$$

となることを示せ。

d) $v(t) = \frac{v_0}{1+(t/t_0)^2} \cos(\omega't)$ (v_0 、 t_0 、 ω' は正の定数) のとき $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$ を計算せよ。

2) 次に $\omega_1 \neq \omega_2$ の場合を考える。

a) 波動関数を

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} a_1(t)e^{-i\omega_1 t} \\ a_2(t)e^{-i\omega_2 t} \end{pmatrix} \quad (4)$$

とおくとき、 $a_1(t)$ 、 $a_2(t)$ はどのような時間発展の方程式に従うか。

b) $t = 0$ で状態1にあったとき、その後の時刻 $t (> 0)$ で状態2にある確率 $P'(t)$ を求めよ。ただし、 $v(t)$ が微小であるとして最低次の近似を用いよ。

c) $v(t) = v'_0 e^{-(t/t'_0)^2}$ (v'_0 、 t'_0 は実定数) のとき、 $\lim_{t \rightarrow \infty} P'(t)$ が ω_1 、 ω_2 の関数としてどのように振舞うか答えよ。前問の近似が使えるものとする。

物理学 V

問題 2

周期境界条件を満たす格子間隔 a , 原子数 N の一次元結晶がある。位置座標を x とすると結晶の周期ポテンシャル $V(x)$ は $V(x) = V(x+a)$ を満たす。電子の質量を m , プランク定数を 2π で割ったものを \hbar , $V(x)$ は実数かつ偶関数として以下の問に答えよ。

- 1) $V(x) = 0$ の場合, 電子の波動関数は $\phi_k(x) = (Na)^{-1/2} e^{ikx}$ となる。
 - a) 周期境界条件のもとで許される波数ベクトル k の値, およびエネルギー固有値 ε_k を求めよ。
 - b) 単位体積, 単位エネルギーあたりの固有状態の数 (状態密度) を求め, その概形を図示せよ。

- 2) 周期ポテンシャルは逆格子ベクトル g のフーリエ級数によって展開できるので, $V(x) = \sum_g e^{igx} v(g)$ と書ける。このとき, $V_{kk'} \equiv \int_0^{Na} \phi_k^*(x) V(x) \phi_{k'}(x) dx$ を求めよ。

- 3) a) 周期ポテンシャルが小さな場合はそれを摂動とみなすことができる。縮退がない場合の摂動法を用い, 波動関数を一次摂動の範囲で求めると

$$\psi_k(x) = \phi_k(x) + \sum_{g \neq 0} \frac{v(g)}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+g}} \phi_{k+g}(x)$$

となることを示せ。

- b) 周期ポテンシャル中の電子の波動関数 $\chi_k(x)$ はブロッホの定理に従う。 $\chi_k(x) = e^{ikx} u_k(x)$ と書いたとき関数 $u_k(x)$ の満たすべき条件を示せ。また, このときの運動量 $\hbar k$ は自由電子のそれと違う意味を持っている。その違いを簡単に説明せよ。
 - c) a) の波動関数 $\psi_k(x)$ はブロッホの定理を満たしていることを示せ。
- 4) a) $k = -g/2$ ($g \neq 0$) の電子は周期ポテンシャルによりブラッグ反射を起こす。このとき, 周期ポテンシャルがなければ状態 k と状態 $k+g$ は縮退しているが, $V(x)$ が摂動として加わると縮退がとけ, エネルギー固有値 E_k にギャップが生じる。それを見るため, $k = -g/2$ 近傍の波動関数を $\psi_k(x) = c_k \phi_k(x) + c_{k+g} \phi_{k+g}(x)$ と近似する。シュレディンガー方程式, および c_k, c_{k+g} はゼロではないという条件を用いて E_k を求めよ。さらにギャップ近傍の様子を図示せよ。ただし, $v(g) < 0$, $v(0) = 0$ とする。
 - b) $k = -g/2$ での電子の波動関数を求めよ。さらに, ギャップが生じる起源を, 得られた波動関数を用いて説明せよ。

物理学V

問題3

注)

- * 解答用紙には計算の過程も書くこと。
- * 数値の答えは特に指定のない限り有効数字2桁で答えること。
- * δ 又は $n\delta$ が1に比べ十分小さい場合、 $(1 \pm \delta)^n \approx 1 \pm n\delta$ 、 $\exp(\pm\delta) \approx 1 \pm \delta$ 、などの近似計算を行っても良い。
- * $1\text{ns} = 10^{-9}$ 秒、 c は光速度 ($c=0.300\text{m/ns}$)。

図1は、荷電粒子の質量を飛行時間測定法で測定する実験の模式図である。プラスチックシンチレーターと光電子増倍管よりなる二つのカウンター (C1、C2) を距離 L だけ離して置き、その間を運動量 p の荷電粒子を通過させる。それぞれの光電子増倍管からは、粒子が通過した際電気信号が出力され、それを同軸ケーブルで時間差測定回路に送る。時間差測定回路 (TDC) では、Startに信号が入ってからStopに信号が入るまでの時間差 T が測定される。この時間差 T と飛行距離 L からこの粒子の速度が分かり、運動量 p と組み合わせることによりその粒子の質量を求めることが出来る。

この実験について次のページの問に答えよ。ただし、 $p=1,000\text{MeV}/c$ 、 $L=3\text{m}$ とし、簡単のためにこれらの値には、誤差がないものとする。また、プラスチックシンチレーターを粒子が通過してから、時間差測定回路に信号が入力されるまでにかかる時間はC1とC2で同じとする。

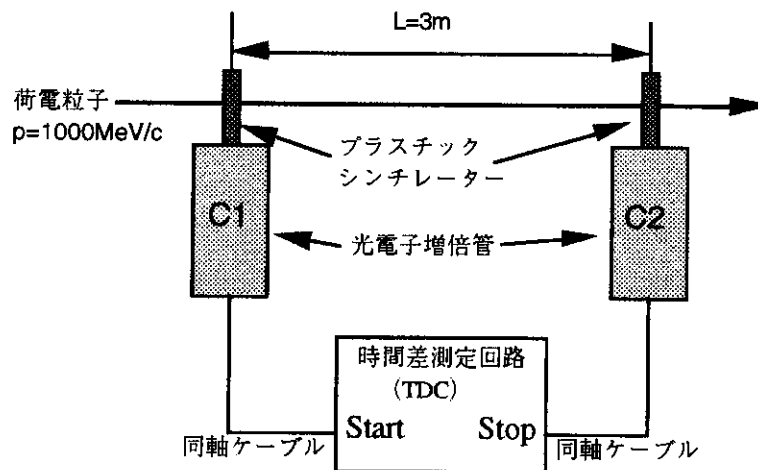


図1

1) プラスチックシンチレーターと光電子増倍管で荷電粒子が検出できる原理を200字以内で説明せよ。

2) この実験装置で10,000事象の測定を行い、得られた時間差の度数分布を片対数グラフに書くと、図2のような山型になった。ただし横軸 T は飛行時間を表わし、縦軸 n は飛行時間0.1ns毎の事象数を表わす。この山はガウス（正規）分布の形をしており、その平均値 μ は13.7ns、分散 σ^2 は $(0.66\text{ns})^2$ であった。

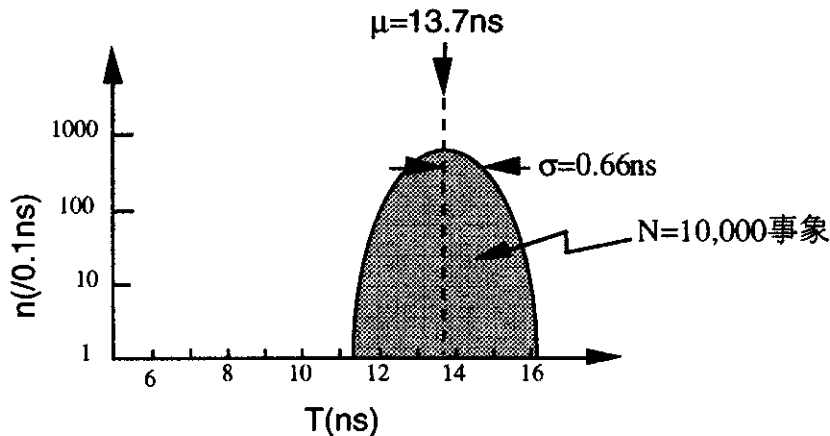


図 2

- ガウス分布は片対数表示では2次曲線になることを示せ。
- 光の速度 c とこの粒子の速度 v との比 c/v の値を計算し、有効数字3桁で答えよ。
- 相対論的效果を考慮して粒子の質量 m を p/c 及び c/v で表わせ。次にこの粒子の質量を実際に計算し、 $[\text{MeV}/c^2]$ の単位で示せ。ただしこの粒子の、プラスチックシンチレータ及び空気中でのエネルギー損失による運動量の変化は無視できるものとする。
- 測定された時間差 T に含まれる誤差を δT 、それに対応する質量の誤差を δm として、 $m\delta m$ を p 、 L 、 T 及び δT で表わせ。
- この実験で測定された質量に含まれる統計誤差を計算せよ。

(ヒント：度数 N が1より十分大きい時、ガウス分布の平均値 μ に対する統計誤差は σ/\sqrt{N} である。)

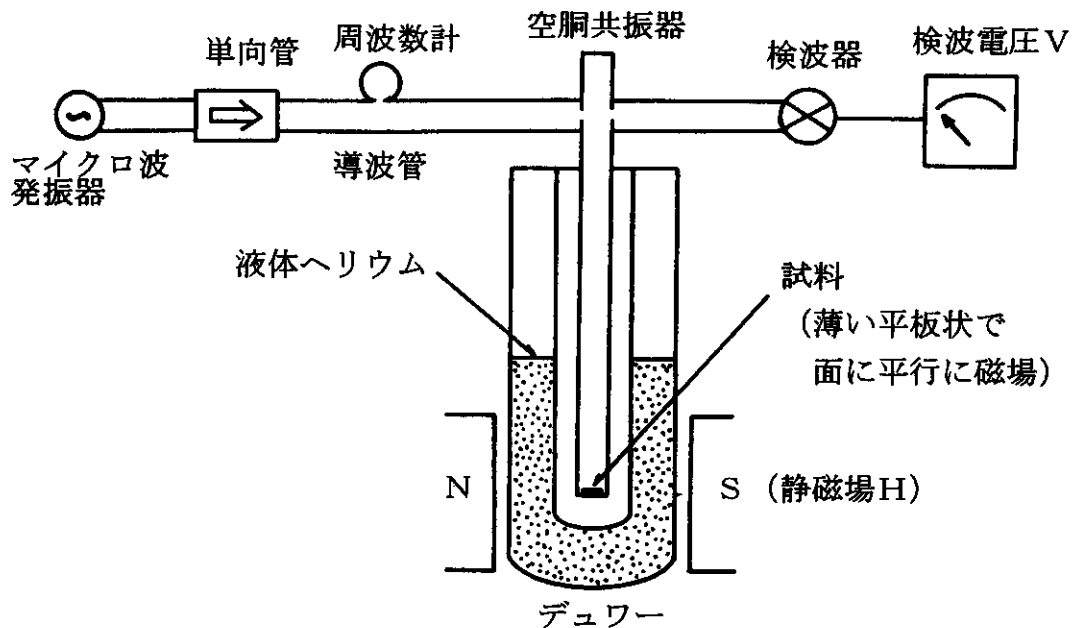
3) 静止した荷電パイ中間子（質量 $140\text{MeV}/c^2$ ）は、26nsの平均寿命でミュー粒子とニュートリノに崩壊する（ $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ ）。今、運動量が $1,000\text{MeV}/c$ の荷電パイ中間子がこの測定装置に入射したとして、相対論的時間の遅れを考慮して、カウンターC1を通過した荷電パイ中間子がカウンターC2にたどりつくまでに崩壊する確率を求めよ。

物理学V

問題4

電子スピン共鳴吸収の簡便な実験装置の概略図を下に記す。次の問に答えよ。

(なお図の中で空洞共振器というのは電磁波共振器の一種であり、その内部において電磁波が定在波となる。図の場合は単純な透過型なので、反射型におけるような Twin-Tee or T-Bridge は使用していない)



- 1) 試料の温度を測定するために、熱電対を使用したい。
熱電対で温度測定ができる原理を記し、さらに極低温用熱電対としてよく使われる Au(含Fe) 対 Cu を使い結線方法の概略図を記せ。
- 2) 試料温度を測定できるもう一つ別の方法を記し、その原理を記せ。
- 3) 共鳴磁場を正確に決めるため、磁場の値を校正したい。
プロトン (^1H 核) の核磁気共鳴吸収によって静磁場を校正する原理を示せ。
- 4) 磁場校正法あるいは磁場測定法について、他の方法を一つ記し、原理を記せ。
- 5) スピン量子数 S を持つ不対電子が静磁場 H 中に置かれると、そのエネルギー準

位が $2S + 1$ 個にゼーマン分裂し (間隔 $g\mu_B H$)、その隣り合った準位間のエネルギー差に等しいエネルギーのマイクロ波が加えられた時、共鳴的に吸収が起きる。

マイクロ波発振器からの発振周波数 f_0 ($= 9000$ MHz) が空洞共振器と同調しているとき、静磁場を変化させると、磁場 H_0 で試料により最大の共鳴吸収が起こった。その最大の時の検波電圧を 1 volt として、検波電圧 V を、静磁場 H の関数として模式的に図示せよ。また、 g -値を 2.0 とした場合の共鳴磁場 H_0 を求め有効数字 3 桁で記せ。なおボーア磁子 μ_B とプランクの定数 h との比として、 $h/\mu_B = 0.7 \times 10^{-6}$ gauss/s あるいは $\mu_B/h = 1.4 \times 10^6$ s/gauss としてよい。

- 6) 共鳴過程を考えるのに、個々のイオンの準位で考えるより試料全体の磁気能率で考える方が便利な場合がある。磁化 (磁気能率/体積) を M とし、 J を角運動量とすると、運動方程式は

$$dJ/dt = \text{トルク/体積} = M \times H$$

であり、スピン系が格子との相互作用を受けていないとすると $M = \gamma J$ (γ は gyromagnetic ratio) である。静磁場 H_z 、マイクロ波の動磁場 H_x を考えて、常磁性物質に対する共鳴条件式を求めよ。

- 7) 試料が常磁性物質ではなく、強磁性物質となると、共鳴吸収の起きる静磁場は異なった値となるが、その違いが何に由来し、どのように異なるかを説明せよ。

物理学 V
問題 5

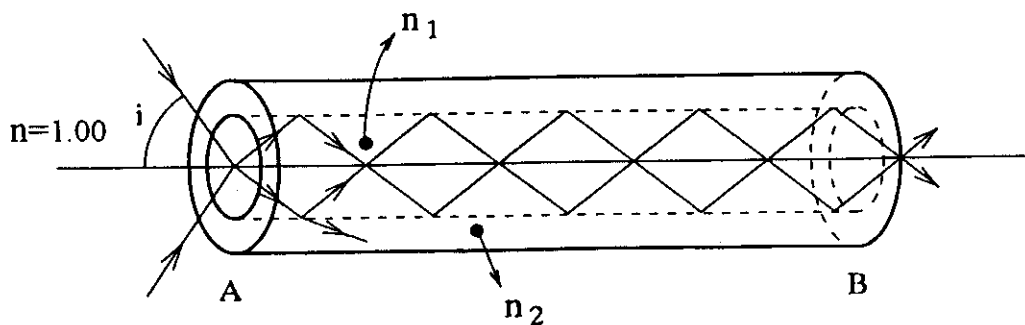
V-5-1/2

1) 光ファイバーを用いて光を導きたい。図のように、屈折率 n_1 の吸収のない真っ直ぐな丸棒のまわりに屈折率 n_2 の薄い管壁の円管を密着させた光ファイバーがある。その一端 A にレンズを使って点光源からの光を中心に集光させる。棒の中に入った光は柱面で反射を繰り返しながら棒内を伝播し、他端 B から外に出て行く。外界の屈折率 $n=1.00$ とする。

a) 光が丸棒内を全反射を繰り返しながら損失なく伝播するための、入射角 i の満足すべき条件を n_1 と n_2 で表せ。

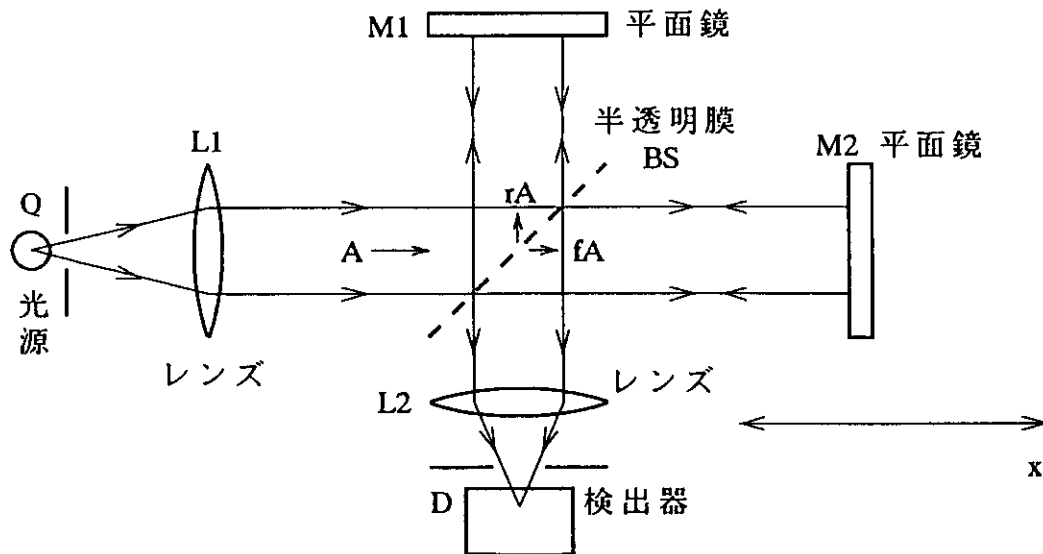
b) $n_2 = 1.00$ の場合に、入射角によらず常に損失なしに光を伝播させるための丸棒の屈折率 n_1 の満足すべき条件を求めよ。

c) 丸棒の長さを L 、真空中の光の速さを c とする。入射角 i で入射した光が丸棒内を全反射を繰り返しながら伝播するのに要する時間 T を L 、 c 、 n_1 、入射角 i で表せ。いま、 $L=10$ [km]、 $n_1=1.6$ 、 $c=3.0 \times 10^{10}$ [cm/sec] とし、入射角 $i=0^\circ$ で入射した場合光が丸棒内を伝播するのに要する時間 T_0 と、屈折角が 18° になるように入射した場合光が丸棒内を伝播するのに要する時間 T_1 を計算し、その差 $\delta T = T_1 - T_0$ を求めよ。 $\cos 18^\circ \doteq 0.951$ とする。 □



2) 真空中におかれた干渉計 (図参照) において、点光源Qから出た波長 λ の単色光はレンズL1で平行光線 (光の電場の振幅をAとする) にされ、半透明膜BS (厚さや吸収は無視し、その振幅反射率をr、振幅透過率をfとする) で二つの光束に分けられる。反射光と透過光はそれぞれ平面鏡M1、M2によって元の方向に戻され、BS上で重ね合わされ干渉する。この干渉光をレンズL2で集光し検出器Dで検出する。

- a) 半透明膜BSから鏡M1、M2までの距離をそれぞれ x_1 、 x_2 としたとき、反射光と透過光との間のBSにおける光路差 (光学距離の差) δx 、位相差 $\delta\phi$ を求めよ。
- b) 干渉光の強度を求めよ。
- c) 鏡M1を固定し、鏡M2をx方向に平行に移動する。光路差 δx と干渉光の強度との関係を図示せよ。また、強度が最大になるのは δx がどのような場合か。



英語

問題1と問題2は別々の解答用紙に解答せよ。

問題1

次の英文*を読んで1)～5)の質問に日本語で答えよ。

Helium was discovered not on the earth but on the sun. This discovery, in 1868, was long before space travel, and it was accidental.

Two German Scientists, the chemist Robert Wilhelm Bunsen and the physicist Gustav Robert Kirchhoff, invented an optical instrument called a spectroscope at the University of Heidelberg in 1859. This instrument could produce a bright-line spectrum (a series of bright lines on a dark background, individually characteristic of each element in terms of the number, color, and spacing of the lines) when the element was heated to incandescence. With this instrument they identified two new elements in the "sodium family" of the periodic table, cesium and rubidium, in 1860 and 1861.

Pierre Janssen, head of the Astrophysical Observatory at Meudon, France, went to India to observe and make photographs of an eclipse of the sun on August 18, 1868. In October, J. Norman Lockyer, who was professor of astronomical physics at the Royal College of Science in London, recorded spectra of the luminous gases surrounding the sun, using a special telescope that allowed this to be done even in the absence of an eclipse. He noted special lines that indicated hydrogen to be among the immense volume of gases shooting from the sun. He also saw two yellow lines that were known to be characteristic of sodium, but there was a third yellow line that did not correspond to any known element. He concluded that it might belong to an element present among the gases surrounding the sun but not known on earth. He reported this finding to the Royal Society the same day he observed it, October 20, 1868. Three days later Warren de la Rue reported Lockyer's finding to the French Academy of Sciences.

Meanwhile, Janssen had studied the spectra he recorded in India on August 18, and he found the same new yellow line, which he reported to the French Academy by letter on October 20, only a few minutes after Lockyer's letter had been reported by la Rue. This posed a problem of priority of credit: Janssen's observation was earlier, but Lockyer's report was earlier. Rather than each insisting on first place, the two astronomers became close

* "Serendipity, Accidental Discoveries in Science" by R. M. Roberts

friends, and the French Academy struck a commemorative medallion that bore the profiles and names of both men.

Lockyer continued his investigations with the help of Edward Frankland, professor of chemistry at the University of Manchester. He became convinced that the new spectral line belonged to a new element, which he named helium after the Greek word helios for the sun.

A search then began for evidence of helium on earth, but 23 years passed before any evidence appeared. In 1891 W. H. Hillebrand of the U. S. Geological Survey observed the spectrum of gas produced by heating a uranium ore; it was mainly nitrogen, but some lines in the spectrum did not belong to nitrogen. When Sir William Ramsay in London read Hillebrand's report, he suspected that the unknown spectral lines might belong to argon, a rare and inert gaseous element that he and Lord Rayleigh had discovered in air a year before. He obtained another type of uranium ore and treated it as Hillebrand had his sample; he did find argon, as he had hoped, but he found an additional yellow spectral line that did not belong to either nitrogen or argon.

He thought at first that the line came from krypton (as it was named later), another inert gas he expected to be associated with argon; but when he sent samples of the gas to Lockyer and to Sir William Crookes for more precise spectrographic measurement, they both confirmed that the wave length of the yellow line was exactly the same as that of helium in the atmosphere of the sun. Ramsay sent simultaneous communications to the British Royal Society and the French Academy of Science announcing the discovery of helium on earth on March 26, 1895. Sir William Ramsay was awarded the Nobel prize in chemistry in 1904 for his discovery of argon, helium (on earth), and the other rare gases. He had found krypton, xenon, and neon between 1895 and 1898, filling up the zero column of the periodic table with the cousins of helium.

注) incandescence: 白熱, ore: 鉱石

- 1) 本文の記述にそって, 分光器について説明しなさい.
- 2) 太陽でヘリウムが発見されたときに, 2人の科学者が採用した方法の違いについて説明しなさい.
- 3) 太陽でヘリウムが発見されたときに持ち上がったトラブルとは何かを書きなさい.
- 4) その問題はどのように解決されたか説明しなさい.
- 5) ヘリウムが地球上で発見されたときの経緯を, 4人の科学者の貢献が分かるように説明しなさい. □

問題 2

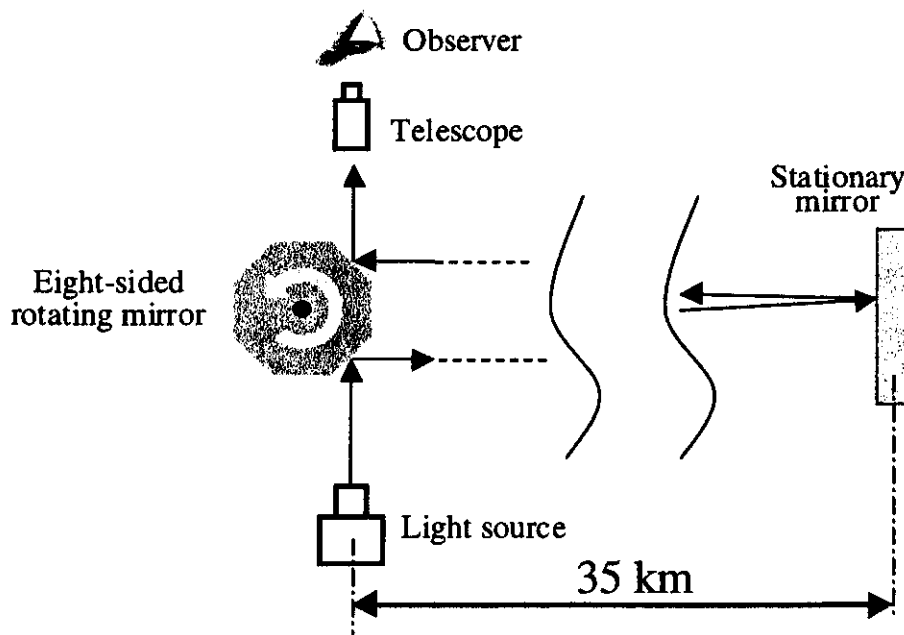
- 1) 以下の和文のうち下線部分 a), b)を英訳しなさい。

Galileoは、距離のわかっている2つの丘の頂上間を光が伝播する時間の測定を試みることにより、光速度測定を企てた。助手を丘の一つに配置し、彼自身はもう一方の丘のうえに立った。彼は助手に、Galileoのランプの閃光を見た瞬間にランプからカバーを取り去るように指示した。 a) Galileoは、彼のランプの閃光と助手のランプの光が見えたときの時間間隔を測定した。 その時間は人間の反応時間程度であり、光速は極端に速いに違いないとGalileoは結論した。

その後、様々な技術が光速度の測定に用いられた。これらの中でもっとも重要なものは Michelson によって行われたものである。 b) 彼は、1880年から1920年代にかけて行った一連の高精度実験のために、下図で示すような回転鏡装置を用いた。

- 2) 下図に示した Michelson による光速度測定方法が簡条書きで説明されている。この説明のうち a), b), c)を英訳し説明を完成しなさい。

- * Light from a source directed at one face of a rotating eight-sided mirror.
- a) 反射した光は、遠くはなれた鏡まで行き再び戻ってくる。
- b) もし回転鏡が適切な割合で回転していれば、戻ってきた光線は回転鏡の面で反射し望遠鏡に入り観測される。
- * If the speed of rotation was only slightly different, the beam would be deflected to one side and would not be seen by the observer.
- c) 鏡に要求される回転速度と平面鏡までの距離から、光速が計算できる。



Michelson's speed-of-light apparatus