平成１２年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物 理 学 専 攻

筆 記 試 験 問 題

《平成１１年８月２４日（火）・２５日（水）実施》

東北大学大学院理学研究科物理学専攻

問題1と問題2は別々の解答用紙に解答せよ

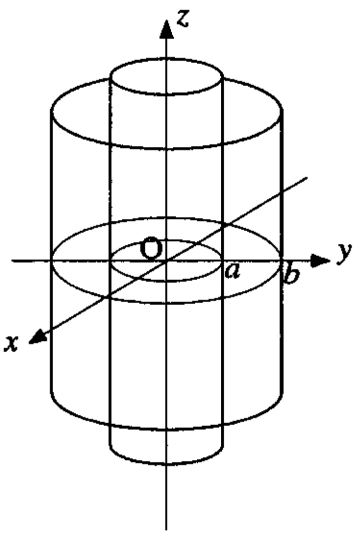
問題1

1）xy 平面に垂直で原点に中心がある，$\pm z$ 方向に無限の長さの同心円筒がある．外側の円筒（半径 b）に単位長さあたり $+2Q$ の電荷，内側の円筒（半径 a, $a < b$）に単位長さ当たり $-Q$ の電荷が一様に分布している．単位系を明記して以下の問に答えよ．

a）z 軸からの距離を $r=\sqrt{x^2+y^2}$ として，$r<a$, $a<r<b$, $b<r$ の各領域に分けて xy 面上での電場 $\boldsymbol{E}$ を求め，電気力線の大体の様子を図示せよ．

b）$r = b$ での電位を基準にして xy 面上での電位を求めよ．

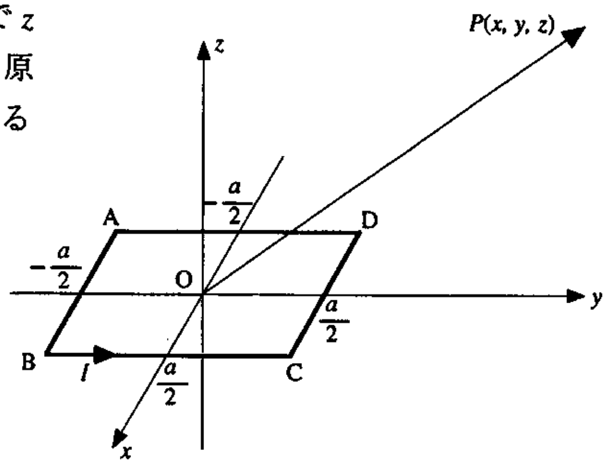
c）$b<r$ の xy 面上で，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}$ を求めよ．



2）図の様に，原点Oが中心の一辺が長さ a の正方形回路ABCDに電流 I が流れている．単位系を明記して以下の問に答えよ．ただし，$r>>a$ として計算せよ．

a）この回路が点 $P(x, y, z)$ に作る磁束密度を計算せよ．

b）この磁束密度は大きさが Ia^2 で z 軸方向を向いた磁気双極子を原点Oに置いたことと同じであることを示せ．



問題2

1）誘電率εの等方的媒質を半径 a の球にして真空中に置く（図1）．そこに外部から z 方向を向いた一様な静電場 $\boldsymbol{E}_0$ を作用させたとする．単位系（[CGS]または[SI]）を指定した上で以下の問いに答えよ．必要に応じて，最後に示した関係式を参考にすること．球の中心は，極座標の原点 $\boldsymbol{r}=0$ にあるとする．

a）外部電場 $\boldsymbol{E}_0$ によって，この物質に一様な分極密度が $\boldsymbol{P}$ が発生する．この状態は，単位体積当たり N 個のプラスとマイナスの電荷 $\pm e$ が一様に分布し，その中心が z 方向にそれぞれ $\pm\frac{s}{2},(a>>|s|)$ に変位して $\boldsymbol{P}=Ne\boldsymbol{s}$ となった状態に相当する．そのとき球表面には分極電荷が発生し，それによって球内部には新たに以下の反電場 $\boldsymbol{E}_\mathrm{d}$ が発生する．

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{d}=-\frac{4\pi\boldsymbol{P}}{3}\ [\mathrm{CGS}],\quad \boldsymbol{E}_\mathrm{d}=-\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}\ [\mathrm{SI}] \qquad (1)$$

$\boldsymbol{s}=0$ のとき，プラスの電荷 e による球内部（$|\boldsymbol{r}|<a$）での電場を求めよ．

b）$\boldsymbol{s}\neq 0$のとき，プラスの電荷 e による球内での電場を求めよ．

c）b）の結果を用いて，プラスとマイナスの両電荷による球内の電場を求め，それが（1）式に等しくなることを示せ．

d）球内の全電場 $\boldsymbol{E}$ を外部電場 $\boldsymbol{E}_0$ と誘電率で書き表せ．

e）球の外部からは $\frac{4\pi a^3\boldsymbol{P}}{3}$ の双極子モーメントが球の中心Oにあるようにみえる．それを a と外部電場と誘電率を用いて書き表せ．

2）問1）で，球を構成する物質が金属であったとする．以下の問いに答えよ．

a）1）－e）で求めたように，球の外部から見た双極子モーメントを求めよ．

b）球の内側 $r\leq b\ (b<a)$ をくりぬいたとする．そのとき，球の外部から見た双極子モーメントを求めよ．

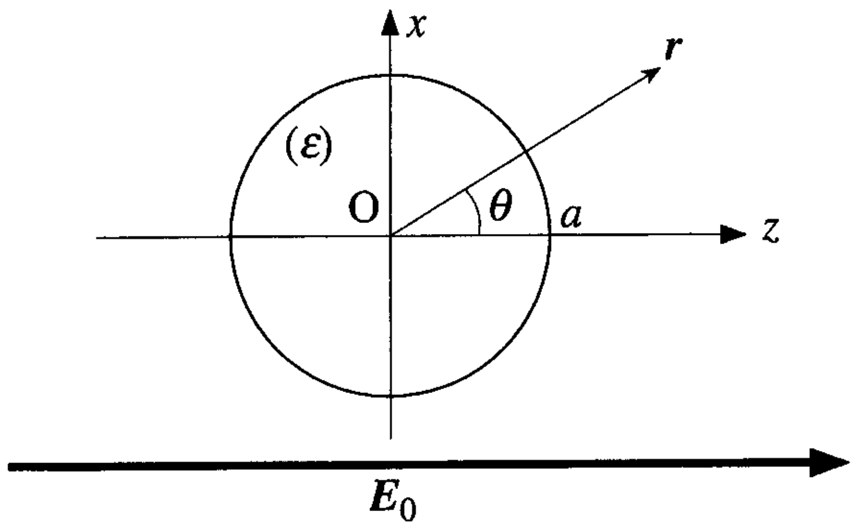


図 1

必要に応じて以下の関係式を参照すること．

[CGS]

$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P} = \varepsilon\boldsymbol{E}$,
$\boldsymbol{P} = \chi\boldsymbol{E}$,
$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$

[SI]

$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon\boldsymbol{E}$,
$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}$,
$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi)$

物理学Ⅱ

問題１と問題２は別々の解答用紙に解答せよ。

問題１

自然長(張力ゼロの時の長さ)が L_0、断面の形が一様なゴムひもがある。
ゴムが伸縮する際にはゴムの張力 σ 、長さ L、絶対温度 T の間に状態方程式：
$\sigma = \sigma(L, T)$ が成り立つとする。またその際のゴムの体積変化は無視する。
このとき以下の問いに答えよ。

1) ゴムの長さを準静的に dL だけ変えるとする。このとき
 a) ゴムになされる微小な仕事 $d'W$ を求めよ。
 b) ゴムが外界から受け取る微小な熱量 $d'Q$ とエントロピーの微小変化 dS との間に成り立つ関係式を記せ。
 c) 内部エネルギーの微小変化 dU を表わす式を記せ。

2) T と L の関数としてヘルムホルツの自由エネルギー $F=U-TS$ を導入する。
 a) F の微小変化 dF を表わす式を記せ。
 b) マックスウェルの関係式：$(\partial\sigma/\partial T)_L = -(\partial S/\partial L)_T$ が成り立つことを示せ。
 c) 関係式 $(\partial U/\partial L)_T = -T(\partial\sigma/\partial T)_L + \sigma$ を示せ。

3) ゴムの状態方程式が $\sigma = \alpha T(L-L_0)$ と表わされるとき(α は T、L、L_0 に無関係な定数)、次の問いに答えよ。
 a) 関係式 $(\partial U/\partial L)_T = 0$ を示せ。
 b) ゴムが等温準静的に L_0 から L_1 まで伸ばされるとする。ゴムになされる仕事 W ならびにゴムが外界から受け取る熱量 Q を求めよ。

4) ゴムのエントロピー S を長さ L と絶対温度 T の関数として求めよ。
ただし $(\partial U/\partial T)_L \equiv C_L$ (長さ一定のときの熱容量)は T によらない定数とし、$L=L_0$、$T=T_0$ のときのエントロピーの値を S_0 とする。

5) ゴムが L_0 から L_1 まで断熱準静的に伸ばされるとする。伸長前に $T=T_0$ であったとき、伸長後の温度 T_1 を表わす式を求めよ。

問題２

一辺長さ L の立方体の箱に閉じこめられた理想フェルミ気体の１粒子のエネルギー準位は

$$\varepsilon = \frac{h^2}{8\pi^2 m}k^2, \qquad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

である。ここで　m は粒子の質量、h はプランク定数である。　また、

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{L}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{L} \qquad (n_x, n_y, n_z \text{　は正の整数})$$

である。L が十分大きいときにはエネルギー準位は連続的に分布すると見なすことができる。エネルギーが ε と $\varepsilon + d\varepsilon$ の間にある状態数は $V = L^3$ とすると

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = 2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$$

である。ただし、ここでは粒子はスピンを持たないとして、スピンによる縮重は考慮していない。また、以下の問題で解の導出に下記の公式を利用してもよい。

$$\int_0^\infty x^{1/2} e^{-ax} dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

1) 理想フェルミ気体では絶対零度で以下のことが成り立つことを示せ。

a) 粒子数を N とするとフェルミエネルギー μ_0 は

$$\mu_0 = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3N}{4\pi V}\right)^{2/3}$$

である。

b) 内部エネルギー U_0 は

$$U_0 = \frac{3}{5}N\mu_0$$

である。

c) 上記 a)、b) の結果を用いると圧力 p_0、V、U_0 の間には

$$p_0 V = \frac{2}{3}U_0$$

が成り立つ。

2) フェルミーディラック分布

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{1+e^{\beta(\varepsilon-\mu)}},\qquad (\beta=\frac{1}{k_B T})$$

は縮退が弱い場合には

$$f(\varepsilon)\cong e^{\beta(\mu-\varepsilon)}$$

とボルツマン分布で近似できる。ここで T は絶対温度である。この近似では理想フェルミ気体の熱力学量に対して以下のことがなりたつことを示せ。

a)

$$e^{\beta\mu}=\frac{N}{V}(\frac{h^2}{2m\pi k_B T})^{3/2}$$

である。

b) 内部エネルギーを U_B とすると

$$U_B=\frac{3}{2}Nk_B T$$

である。

c) 圧力を p とすると

$$pV=\frac{2}{3}U_B$$

である。

3) 体積 V を一定とすると理想フェルミ気体では 1)－c) の結果より $T\to 0$ では $p\to p_0$ となる。他方、ボルツマン統計では 2)－c) の結果より $T\to 0$ では $p\to 0$ となる。　両者の違いが生じる理由をのべよ。

4) 理想フェルミ気体では内部エネルギーを U とすると任意の温度において関係式

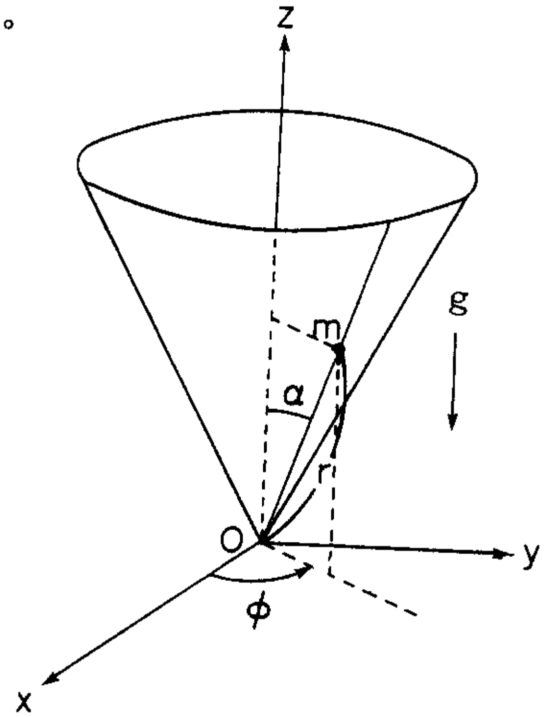
$$pV=\frac{2}{3}U$$

が成り立つことを示せ。

物理学Ⅲ

【問題】

質量 m の質点が、軸が鉛直で頂点が下に向いている滑らかな円錐の内側に沿ってすべっている運動を考える。ここで、重力加速度は g とし、円錐の頂角は 2α とする。この運動を記述するには 3 次元極座標 r、$\theta(=\alpha)$、ϕ を使うとよい。



1) この運動のラグランジュ関数 L を書け。
2) ラグランジュの運動方程式を書け。
3) この運動のハミルトニアン H を書け。
4) ハミルトニアンを使って、Z 軸（鉛直方向）のまわりの角運動量が保存することを示せ。
5) 質点が一定の高さで円運動をするための条件を示せ。このとき $r=r_0$ とせよ。
6) 5)のような定常運動をしている質点に r 方向に微少な撃力を加えてから後の運動はどうなるか。

物 理 学 IV

問題１と問題２は別々の解答用紙に解答せよ。

問 題 1

次のような一次元の井戸型ポテンシャル $V(x)$ がある。

$$V(x) \quad = V_0, \quad |x| > a$$
$$\qquad\quad = 0, \quad |x| < a$$

ここで $V_0 > 0$ である。このポテンシャルに束縛されている質量 m の粒子の定常状態を考える。以下の問に答えよ。

1）エネルギー E の固有状態に対する $|x| < a$, $|x| > a$ でのシュレーディンガー方程式を書け。

2）井戸に束縛された粒子 $(E < V_0)$ の固有状態に対して、各領域での波動関数の一般解を求めよ。

3）固有エネルギーを決める条件式を求めよ。

4）a を固定して V_0 を変化させた時、離散的エネルギー準位の数が２個だけとなる V_0 の範囲を求めよ。

5）エネルギーの低い順から２個の固有状態に対する波動関数の概形を描け。横軸を x 軸、縦軸に波動関数をとり、特徴が分かるようにせよ。

問題２

空間３次元の１粒子問題を考える。ポテンシャルを$V(\vec{r})$、波動関数を$u(\vec{r})$、粒子の質量をμとする。$\vec{r}$は３次元位置ベクトル。

１）エネルギー固有値をEとして、エネルギー固有値方程式（時間に依らないシュレーディンガー方程式）を書け。

２）ポテンシャルが球対称の場合、エネルギー固有値方程式は極座標で変数分離できて、$u(\vec{r})$の特殊解は$R(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$と表すことができる。$Y_{lm}(\theta,\phi)$（規格化された球面調和関数）はどんな物理量の固有関数で、固有値はいくらか。

３）$u(\vec{r})$は規格化されているとして、$R(r)$が満たすべき規格化条件を書け。

４）球対称ポテンシャルを$V(r)$とすると、$R(r)$が満たすべき動径方程式は

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left\{\frac{2\mu}{\hbar^2}(E-V(r))-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}R=0 \tag{1}$$

となる。ここで$\hbar$ =プランク定数/2π。束縛状態の場合、lが共通で異なるエネルギー固有値に属する固有関数の動径部分は互いに直交することを、（１）式を用いて証明せよ。

５）ポテンシャルが引力的クーロンポテンシャルすなわち

$$V(r)=-\frac{k}{r}$$

（kは正の定数）の場合、エネルギー固有関数は主量子数n、軌道角運動量量子数lおよび磁気量子数mで指定される。すなわち一般形は

$$u_{nlm}(\vec{r})=R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$$

と表される。エネルギー固有値はnとlで指定される。すなわち$E=E_{nl}$。

a) $R_{10}(r)$の関数形を$N_{10}e^{-b_{10}r}$と仮定して（１）式を解き、エネルギー固有値E_{10}と係数b_{10}を決定せよ。規格化定数N_{10}を決める必要はない。

b) $R_{20}(r)$の関数形を$N_{20}(1+ar)e^{-b_{20}r}$と仮定して（１）式を解き、エネルギー固有値E_{20}、係数aおよびb_{20}を決定せよ。規格化定数N_{20}を決める必要はない。

c) $R_{10}(r)$と$R_{20}(r)$が直交することを確かめよ。nを正の整数として、次の公式を用いてもよい。

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx=n!$$

d) $E_{21}=E_{20}$である。$R_{21}(r)$の考えられる最も簡単な関数形を、理由を付けて推測せよ。

e) $(n,l)=(1,0),(2,0),(2,1)$で指定される状態について、縮退のパターンを調べよ。

物理学Ⅴ

◉物理学Ⅴは５問のうちから２問を解答する選択問題です。

◉問題１から問題５までの中から、２問を選択して別々の解答用紙に解答しなさい。

◉問題２、問題４、問題５は、それぞれ問題用紙が２枚になっています。

◉解答用紙には、選択した問題（例：物理学Ⅴ　問題１）と受験番号を記入すること。

物理学V

問題1

領域 $[-L/2, L/2]$ で1次元運動する質量 m の量子力学的粒子を考える。この系のハミルトニアン、シュレーディンガー方程式は次の式で与えられる。

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}, \qquad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \hat{H}\Psi(x,t)$$

1) 時間によらないシュレーディンガー方程式 $\hat{H}\psi_k(x) = E_k\psi_k(x)$ を周期的境界条件を付けて解き、エネルギー固有値 E_k と波動関数 $\psi_k(x)$ を求めよ。k は波数である。

2) 波動関数 $\psi_k(x)$ を規格化して、これが規格直交条件

$$\langle\psi_k|\psi_{k'}\rangle = \int_{-L/2}^{L/2}\psi_k^*(x)\psi_{k'}(x)dx = \delta_{k,k'}$$

を満たしていることを示せ。ただし、$\delta_{k,k'}$ はクロネッカーの δ である。

3) 波動関数 $\psi_k(x)$ が完全性条件

$$\sum_k \psi_k^*(x)\psi_k(x') = \delta(x-x')$$

を満たしていることを示せ。ただし、$\delta(x-x')$ はディラックの δ 関数である。

4) 時刻 $t = t_0$ での波動関数 $\Psi(x,t_0)$ が与えられた時、時刻 t での波動関数 $\Psi(x,t)$ はグリーン関数 $G(x,x_0;t,t_0)$ を用いて

$$\Psi(x,t) = \int_{-L/2}^{L/2} G(x,x_0;t,t_0)\Psi(x_0,t_0)dx_0$$

と書けることを示せ。但し、グリーン関数 $G(x,x_0;t,t_0)$ は次式で定義される。

$$G(x,x_0;t,t_0) = \sum_k \psi_k^*(x_0)\psi_k(x)e^{-iE_k(t-t_0)/\hbar}$$

5) 運動領域が無限に広くなった極限 $(L \to \infty)$ でグリーン関数 $G(x,x_0;t,t_0)$ を具体的に計算し求めよ。この極限で波数 k に関する和は積分になる。

6) 時刻 $t = 0$ で次の波動関数で与えられる最少波束状態を考える。

$$\Psi(x,0) = C\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

運動領域は無限に広い $(L \to \infty)$ とせよ。

a) 規格化定数 C を求めよ。

b) 時刻 t での波動関数を求めよ。

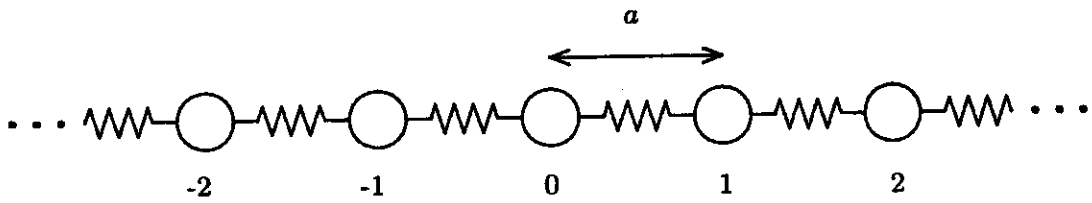
ヒント：以下の積分式を用いて可。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-k^2} = \sqrt{\pi}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik^2} = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{i}{4}\pi\right)$$

物理学V

問題2

質量 M の原子が1次元格子を組み、隣り合った2つの原子間の相互作用がバネ定数 k のフック力で与えられる場合—原子鎖—を考える.



n 番目の原子の平衡位置からの変位を u_n とする. 格子定数を a とし、ゼロ番目の原子の平衡位置を原点にとれば、n 番目の原子の平衡位置 x_n は na となる. $u_n(t)$ は空間変数が離散化されている場合の場（波動場）$u(x_n,t)$ とみなすことができる. n 番目の原子に働く外力を $f(x_n,t)$ とし、原子鎖が無限に長いとすると、運動方程式は次のように表される：

$$M\ddot{u}(x_n,t) = k[u(x_n+a,t) - 2u(x_n,t) + u(x_n-a,t)] + f(x_n,t), \quad (-\infty < n < +\infty). \tag{1}$$

運動方程式は無限個の未知関数 $u_n(t) = u(x_n,t)$ に対する連立線形常微分方程式である. 原子鎖の運動は波動的となるので、この運動方程式を波動方程式と呼ぶことにする.

波動方程式 (1) は線形なので、$u(x_n,t)$ や $f(x_n,t)$ は複素数の関数として扱ってよい. 複素数関数として波動方程式が満たされれば、その実数部分も波動方程式を満たすからである. 特に、外力が $f(x_n,t) = \eta(x_n)\exp(-i\omega t)$ （$\omega > 0$）と表される場合、$u(x_n,t) = \varphi(x_n)\exp(-i\omega t)$ と表される解が存在する. この解（特殊解）は定常解と呼ばれる. $\varphi(x_n)$ は線形連立方程式

$$-M\omega^2\varphi(x_n) = k[\varphi(x_n+a) - 2\varphi(x_n) + \varphi(x_n-a)] + \eta(x_n) \tag{2}$$

を満たす. 外力が無い場合（$\eta(x_n) \equiv 0$）にはこの方程式は斉次形（同次形）となる：

$$-M\omega^2\varphi(x_n) = k[\varphi(x_n+a) - 2\varphi(x_n) + \varphi(x_n-a)]. \tag{3}$$

この方程式の解は原子鎖の基準振動を表すが、それは進行波とすることができる：$\varphi_q(x_n) = \exp iqx_n$. この場合、$u(x_n,t) = \exp i(qx_n - \omega t)$ となる. x_n が a の整数倍であるために $\varphi_q(x_n)$ は波数 q に関して周期的で、その周期は $2\pi/a$ となる. 従って、波数の変域は $-\pi/a < q \leq \pi/a$ と制限することができる.

1）先ず、斉次形の場合から考える．

a) 波動方程式 (3) を用いて、進行波解 $\varphi_q(x_n) = \exp iqx_n$ の波数 q と角振動数 ω の間の関係（波の分散関係式）$\omega = \omega(q)$ を決定せよ．

b) $\omega(q)$ の最大値 ω_{max} を求めよ．また、波の位相速度の長波長極限値 c を求めよ．

c) 関係式 $\omega = \omega(q)$ を $-\pi/a < q \leq \pi/a$ の範囲で図示せよ．

d) 進行波解 $\varphi_q(x_n)$ は一種の固有関数であるからその全体は完全系をなす．完全性を表す次の関係式を証明せよ：

$$\frac{a}{2\pi}\int_{-\pi/a}^{\pi/a} dq\,\varphi_q(x_n)\varphi_q^*(x_m) = \delta_{nm}, \quad (-\infty < n,\, m < +\infty). \tag{4}$$

ただし、$\varphi_q^*(x_m)$ は $\varphi_q(x_m)$ の複素共役を意味する．

2）次に、外力が時間に関して周期的な場合を考える．

a) グリーン関数を関係式

$$G(x_n, x_m; \omega) = \frac{a}{2\pi M}\int_{-\pi/a}^{\pi/a} dq\,\frac{\varphi_q(x_n)\varphi_q^*(x_m)}{\omega^2(q) - \omega^2} \tag{5}$$

により定義すると、

$$\varphi(x_n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G(x_n, x_m; \omega)\eta(x_m), \quad (-\infty < n < +\infty) \tag{6}$$

は線形連立方程式 (2) の解となることを証明せよ．

b) $\omega < \omega_{max}$ の場合、式 (5) の積分は発散積分となるので、積分は不定となる．物理的に重要な遅延グリーン関数は ω を $\omega + i\epsilon$（ただし、ϵ は正の無限小）とすることにより得られる．特に、低周波 ($\omega \ll \omega_{max}$) では、この積分は長波長近似で評価することができる．この近似では $\omega^2(q)$ は c^2q^2 で近似される．また、波数に関する積分範囲は $(-\infty, +\infty)$ としてよい．この場合の積分を複素関数の周回積分（contour integral）の方法により実行せよ．

c) 前問の結果で特に $n = m$ とすると、$G(x_n, x_n; \omega) = i/(M\omega\omega_{max})$ となる．ゼロ番目の原子に対してのみ周期的外力 $A\cos\omega t = \mathrm{Re}[A\exp(-i\omega t)]$ を加えた場合の波動方程式 (1) の定常解の第 0 成分 $u_0(t) = u(0, t)$ を求めよ．

d) 前問 c) において、1 周期（$T = 2\pi/\omega$）の間に周期的外力がゼロ番目の原子に対してする仕事の値を計算せよ．また、その値が正値となる物理的理由を説明せよ．

e) 問 c) とは異なり、ゼロ番目の原子に対して加えられる周期的外力の角振動数 ω が ω_{max} より大きいとした場合を考える．この場合に周期的外力がする仕事を 1 周期にわたって平均するとゼロとなることを示せ．また、その物理的理由を説明せよ．

物理学Ｖ

問題３

原子核および素粒子の実験に粒子加速器は大きな役割を果たしてきた。　粒子のエネルギーは電子ボルト(eV) で表すと便利である。「1電子ボルトとは真空中において１Ｖの電位差を横ぎることによって電子の得る運動エネルギー」と定義され 1.6×10^{-19} J である。

１)

a) 図１のように真空容器の中に金属製の電極A, Bを L (メートル) 離して置き、出力電圧 V (ボルト) の電源に接続したとき、電極の間に生ずる電界強度はいくらか。

b) 電極の間にある電子が電界から受ける力の向きと大きさはいくらか。

c) 両電極間の加速で得られるエネルギーはいくらか。

d) 電極間電圧が百万ボルトのとき、加速後の電子の早さは光速の何パーセントか。ただし電子の静止質量は 0.51 MeV/c^2 で、c は光の速度である。

e) このような静電加速器で得られるエネルギーの上限は電子または陽子でたかだか 10 MeV 程度である。理由を述べよ。

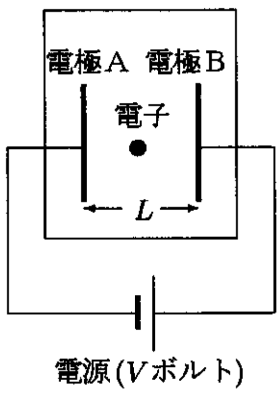


図１　最も簡単な加速器

２)

a) 電子を 1 GeV 程度まで加速するのに用いられる加速器の名前を１つあげ、加速の原理と特徴を１００字以内で簡潔に説明せよ。

b) 陽子を 1 GeV 程度まで加速するのに用いられる加速器の名前を１つあげ、加速の原理と特徴を１００字以内で簡潔に説明せよ。

３)

紙面に垂直な一様磁場中を紙面に平行に運動する素電荷を帯びた粒子は円運動を行う。この場合、粒子の運動量 P (MeV/c)、磁束密度 B (テスラ) と軌道半径 ρ (メートル) の間には次の関係がある。

$$P = 300B\rho$$

磁束密度が１テスラのとき

a) 運動エネルギー 300 MeV の電子の場合、軌道の曲率半径を求めよ。

b) 運動エネルギー 300 MeV の陽子の場合、軌道の曲率半径を求めよ。ただし陽子の静止質量は 940 MeV/c^2 である。

４)

加速器には真空ポンプが不可欠である。真空ポンプの名前を３種あげ、それぞれの動作原理と特徴を１種につき１００字以内で簡潔に述べよ。

注意：計算問題は有効数字２桁で答えよ。

問題4

低温・磁場中における試料の電気抵抗を測定する実験について、以下の問に答えよ。

1) 図1 (a) の容器は、液体ヘリウムの気化速度が小さくなるように様々な工夫がなされている。図1 (a) からその工夫点を5点あげ、その理由を記せ。
2) 超伝導マグネットに、図1(b) の配線をすることにより、電源電流と無関係に一定の磁場を発生し続けることが可能であり、これを永久モードと呼ぶ。所定の磁場を永久モードでどのようにして実現できるか、図を参照して手順を4段階程度に分けて説明せよ。
3) この超伝導マグネットを一定の電流増加率 $dI/dt = 0.01\,\mathrm{A/s}$ で励磁すると、超伝導マグネットの電流を制御する電源電流よりも遅れて所定の磁場が発生する。この現象の発生する理由を説明し、遅延時間を計算せよ。超伝導マグネットの自己インダクタンスを 100 H、図1(b) の半断熱容器内の超伝導線の常伝導状態における電気抵抗を $1\,\Omega$ とし、励磁開始よりかなり時間が経過し、超伝導マグネットも一定の増加率で励磁されているとする。

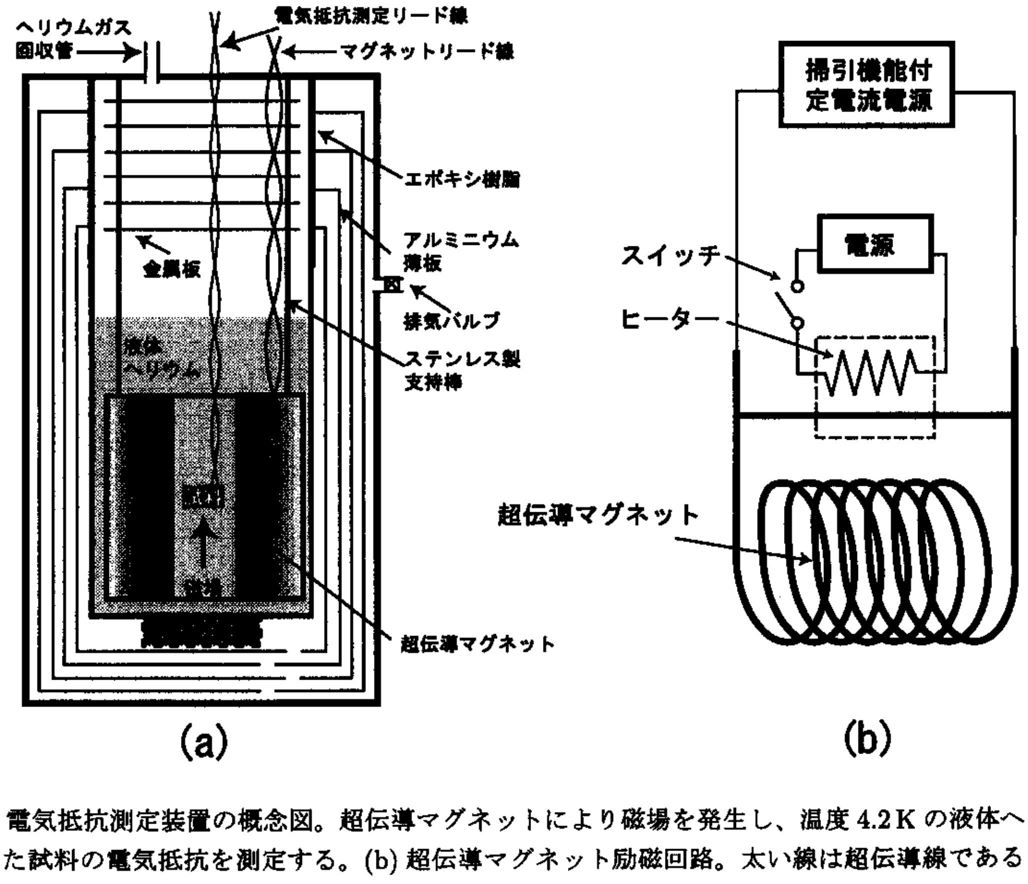


図 1: (a) 電気抵抗測定装置の概念図。超伝導マグネットにより磁場を発生し、温度 4.2 K の液体ヘリウムに浸した試料の電気抵抗を測定する。(b) 超伝導マグネット励磁回路。太い線は超伝導線であることを示す。点線はヒーターと超伝導線の一部を収納する半断熱容器を示す。定電流電源とは、出力負荷の状態に関わりなく一定の電流を流す装置である。また、掃引機能とは設定電流値を連続的に変化させる機能である。

4) 超伝導マグネットには、クエンチと呼ばれる励磁した磁場が瞬時に減衰する現象がある。超伝導ワイヤーに何らかの原因で生じた常伝導部分に電流による発熱がさらに加わり、常伝導部分が一挙に拡大して磁気エネルギーが急激に失われることである。前問のマグネットに電流 100 A を流していたときにクエンチが発生すると最大何リットルの液体ヘリウム (蒸発潜熱 2,500 J/ℓ) が蒸発するか計算せよ。
5) 測定リード線の影響を受けないで試料の電気抵抗を測定する方法を挙げ説明せよ。
6) 試料に −4.0, −3.0, −2.0, −1.0, 0.0, +1.0, +2.0, +3.0, +4.0 mA の直流電流を流したとき、−0.38, −0.33, −0.26, −0.19, −0.10, −0.01, +0.06, +0.13, +0.18 mV の電圧が得られた。正しいと思われる試料の抵抗値を算出し、根拠を説明せよ。算出に下の方眼紙を利用してもよい。
7) 試料の電気抵抗測定は、交流電流を用いてロックイン増幅器で測定すると、より低い電流で測定することができる。ロックインアンプとは、図 2 に示す原理の増幅器である。この様な増幅器を用いるとなぜ低い電流でも測定できるか説明せよ。
8) 図 1 (a) の装置を用いて、4.2 K より高い温度の電気抵抗の温度変化を測定できるように、装置の改造をする。どの様に改造を行えばよいか記せ。
9) 4.2 K より更に低い温度での測定を行うには、どの様に装置の改造を行えばよいか記せ。(到達温度は限定しない。)

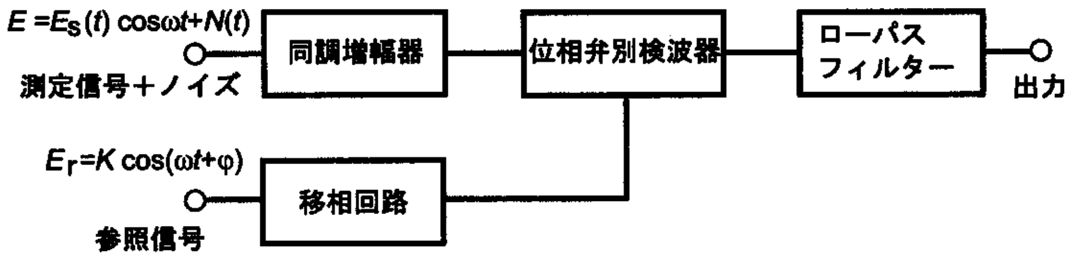
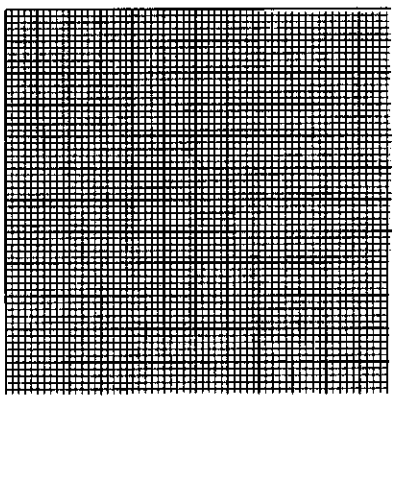


図 2: ロックインアンプ。同調増幅器は周波数 ω 付近の交流電圧のみを増幅する。移相回路は参照信号の位相 φ を変える機能をもつ。位相弁別検波器は入力信号と参照信号の積をとる機能をもつ。ローパスフィルターは $\omega_s(\omega_s \ll \omega)$ 以下の周波数のみを出力する。



物理学 V

問題 5

物質の構造（原子配置）を調べる実験手法としては、X 線回折実験がもっとも広く行われている。X線および結晶からの回折に関する以下の問題に答えよ。

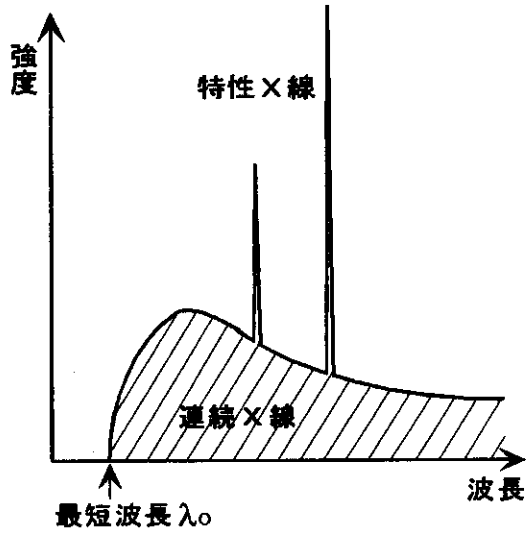
1）X線は光と同じ電磁波であるが、その波長は可視光線（約 400－800 nm : 1 nm = 1 $\times 10^{-9}$ m）よりはるかに短く固体中の原子間距離と同程度 0.05－0.25 nm である。波長 0.25 nm の X 線光子（フォトン）のエネルギーを電子ボルト(eV)単位で求めよ。但し、プランク定数 : 6.6×10^{-34} J·s、光速 : 3.0×10^{8} m/s、1eV : 1.6×10^{-19} J とし、有効数字 2 桁で答えよ。

2）X線回折実験を行うときには、X線の発生源としてX線管を用いた装置が一般的である。X線管では、陰極から発生させた電子を一定の高電圧で加速して陽極に衝突させる。この時にX線が発生する。このX線の波長と強度の分布の模式図は右図のようになり、広い波長領域にわたって強度が分布する連続X線と特定の波長に鋭い強度を示す特性X線とからなる。

a）連続X線の発生機構を説明せよ。

b）連続X線には最短波長 λ_0 が存在する。その理由を述べよ。

c）特性X線の発生機構を説明せよ。



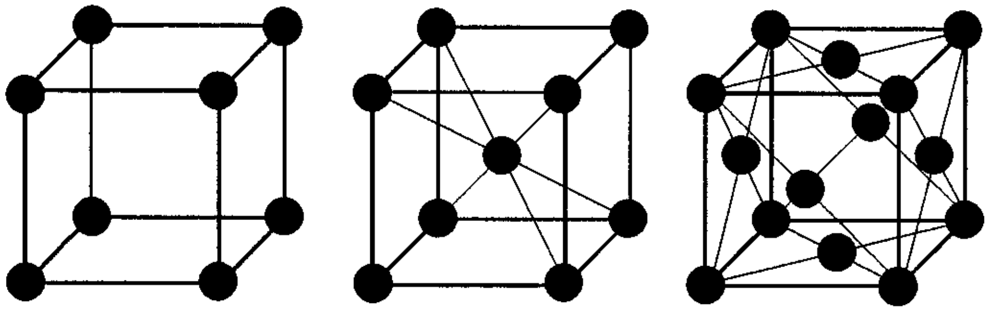
3）X線を結晶試料に入射させた時に生じる回折波は、結晶中の一つ一つの単位胞からの散乱波同士の干渉現象として理解できる。今、一種類の原子だけからなる結晶を考える。回折波の方向を表す回折ベクトル $\boldsymbol{g} = (h, k, l)$ と、格子定数を単位として表した単位胞内の j 番目の原子の位置座標 (x_j, y_j, z_j)（但し $0 \leqq x_j, y_j, z_j < 1$）を用いると、一つの単位胞からの散乱波は次の結晶構造因子 $F_{\boldsymbol{g}}$ と呼ばれるもので表される。

$$F_{\boldsymbol{g}} = \Sigma_j f(\theta) \exp\{2\pi i (h x_j + k y_j + l z_j)\}、\quad f(\theta) : \text{原子散乱因子、} \theta : \text{散乱角}$$

この式は、単位胞内の各原子からの散乱波 $f(\theta)\exp\{2\pi i(h x_j+k y_j+l z_j)\}$ をたし合わせたものが単位胞からの散乱波 $F_{\boldsymbol{g}}$ であることを表している。以下では、簡単のために $f(\theta) = f_0$（定数）すなわち原子散乱因子が散乱角によらず一定とする。

単純立方構造、体心立方構造、面心立方構造の単位胞における原子（黒丸）の配

置を次図に示す。 今、単純立方構造（単位胞内の原子位置は(0, 0, 0)のみ)の場合を考えると $F_{\boldsymbol{g}}=f_0$ となり、観測される散乱波の強度 $|F_{\boldsymbol{g}}|^2=f_0^2$ は回折ベクトル $\boldsymbol{g}$ に依存しないことになる。体心立方構造、面心立方構造に関する以下の問題に答えなさい。



単純立方構造　　体心立方構造　　面心立方構造

a）体心立方構造：$\boldsymbol{g}=(h, 0, 0)$ に対して $F_{\boldsymbol{g}}$ を求め、縦軸を $|F_{\boldsymbol{g}}|^2$、横軸を h として $0 \leqq h \leqq 5$ の範囲で $|F_{\boldsymbol{g}}|^2$ を図示せよ。

b）面心立方構造：$\boldsymbol{g}=(h, h, 0)$ に対して $F_{\boldsymbol{g}}$ を求め、縦軸を $|F_{\boldsymbol{g}}|^2$、横軸を h として $0 \leqq h \leqq 5$ の範囲で $|F_{\boldsymbol{g}}|^2$ を図示せよ。

c）単純立方構造と異なり、体心立方構造、面心立方構造の $|F_{\boldsymbol{g}}|^2$ は特定の $\boldsymbol{g}$ で $|F_{\boldsymbol{g}}|=0$ となる。これは消滅則と呼ばれ、結晶構造を調べるのに役立つ。回折ベクトル $\boldsymbol{g}=(h, k, l)$ に対して $|F_{\boldsymbol{g}}|=0$ となる h, k, l の条件を、

c-1）体心立方格子

c-2）面心立方格子

のそれぞれについて求めよ。

なお、実際の実験で得られるX線回折強度は、$|F_{\boldsymbol{g}}|^2$ に各単位胞からの散乱波同士の干渉を表すラウエ関数 L の2乗を掛けた $|F_{\boldsymbol{g}}|^2 L^2$ となる。

4）実験室内での小規模なX線回折実験ではX線管が用いられているが、近年、軌道放射光源を設置した大型実験施設の共同利用が広く行われるようになってきている。この軌道放射光源の X 線発生原理について述べよ。また、発生したX線の特徴を 3 つ記せ。

英　語

問題１と問題２は別々の解答用紙に解答せよ。

問題１

次の英文[注1]を読んで１）～５）の質問に答えよ.

The idea of a particle interfering with itself seems contradictory, especially when this interference must be explained by the strange idea that the particle can have different positions at the same time. For a theory of matter to be consistent and free of paradoxes, measurements must have two physically important consequences.① First, whenever a measurement is made, the system must take on some particular, definite value from among the many possible. Which one of the possible values will be obtained in any given measurement is entirely unpredictable, but quantum theory quantitatively predicts the probability of each outcome, i.e., it predicts how many times a given value will be obtained when a large number of measurements are made.②

Second, the act of measurement of one quantity will generally cause the particle to take on a range of new values of some complementary quantity. For example, the measurement of position will introduce new values of momentum. The result will always be that the more precisely we measure position, the less precisely we know momentum, and conversely.③ This behavior is summarized in the Heisenberg uncertainty principle, which for the particular example of position and momentum is written

$$\Delta x \cdot \Delta p_{\mathrm{x}} \sim \hbar,$$

where Δx is a measure of the spread of positions of a particle, Δp_{x} is a measure of the spread of the x-component of the momentums of the particle, and $\hbar$ is Planck's constant divided by 2π. The uncertainty principle places fundamental, general limits on what we can measure and what we can learn about nature from measurement.

In particular, the uncertainty principle guarantees that a particle can never be made to exhibit at the same time wavelike properties of interference and particle-like properties such as billiard-ball scattering. No paradox can occur.④ The uncertainty principle is a basic law of nature,

[注1] "*Modern Introductory Physics*" by C. H. Holbrow, J. N. Lioydo and J. C. Amato and we were able to use it to calculate such important features of atomic and nuclear systems as size, kinetic energy of a bound particle, and binding energy. It shows that the smaller, more compact a system of particles is, the higher their kinetic energy is and the more strongly they must be bound to offset the high kinetic energy. The smaller a system of particles is, the greater the forces holding the particles together must be.

1）次の設問に日本語で答えよ。

Use the uncertainty principle to estimate the kinetic energy of an electron confined to the region of an atom. Then, use the uncertainty principle to estimate the kinetic energy of a neutron confined to a nucleus. (You should know reasonable dimensions for an atom and nucleus. Use that $\hbar c$ equals 197 eV nm, if needed.)

2）下線部①を和訳せよ。

3）下線部②を和訳せよ。

4）下線部③を和訳せよ。

5）下線部④を和訳せよ。

問題２

次の和文１）～３）を英訳せよ。文章中カッコの中の英単語は、その前の日本語に対応する。

１）光電効果（photoelectric effect）は、真空中で物質に光を照射した時に、電子が物質の外部に放出される現象である。電子の放出は、それぞれの物質に固有の或る周波数以上の光で起きる。放出される電子の数は光の強度に比例するが、その速度は光の強度に無関係で光の周波数のみによる。

２）モット（Mott）教授：
私は、東西大学（Tozai University）の物理学科に在籍する４年生です。先生が雑誌 Einstein にお書きになったカオス（Chaos）に関する解説を大変興味深く読みました。大学院（graduate school）では、カオスに関する研究を行いたいと考えており、先生の研究室を訪問して最近の研究の進展について、お話を伺えればと思っております。先生のご都合のよい日と時間をお知らせください。

３）もしもし、こちらは近藤研究室（Kondo laboratory）です。
"....I'd like to speak to Professor Kondo...."
近藤先生は、国際会議に出席のため昨日米国に出発されて、研究室には不在です。
もし御伝言があれば、この電話を彼の秘書に回します。
"Thank you please"
このままでお待ちください。