

平成13年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期2年の課程入学試験

物 理 学 専 攻

筆 記 試 験 問 題

《平成12年8月29日(火)・30日(水)実施》

東北大学大学院理学研究科物理学専攻

物理学 I

問題 1 と問題 2 は別々の解答用紙に回答せよ。

問題 1

図 1、2 に示すように、長方形コイル ($L \times 2a$) あるいは金属円柱 (半径 a , 長さ L) が一様磁場中におかれている。図示するように磁場の方向を z 軸、コイルの長辺 (L) 及び金属円柱の軸を y 軸とし、以下の小問 1), 2), 3), 4) について答えよ。各自の使用する単位系を明示した上で解答すること。

1) 交流磁場 ($B_z = B_0 \cos(\omega t)$) 中でコイルが xy 平面内に静止している場合 (図 1)

- Maxwell 方程式から出発して、コイルを貫く磁束 ϕ とコイルに生じる起電力 V の関係を導け。図 1 の矢印の方向を正として起電力の向きも与えよ。
- コイルに誘起される起電力を時間 t の関数として求めよ。

ただし、真空中の Maxwell 方程式は MKSA 単位系で以下のように表される。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{i}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B}/\mu_0, \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}.\end{aligned}$$

2) 静磁場 ($B_z = B_0$) 中で、コイルに定常電流 I が流れている場合 (図 1)

コイルは y 軸の周りに自由に回転でき、その慣性モーメントは M とする。

- はじめ xy 平面上にあったコイルを y 軸の周りに微小角度 θ だけ傾けた。このとき、コイルにかかるトルク (y 軸周りの力のモーメント) の大きさを計算せよ。
- コイルを y 軸の周りに微小角度 θ だけ傾けた後自由にすると、 $\theta = 0$ の周りに微小振動する。その振動数を求めよ。

ただし、コイルに流れる電流が作る磁場は静磁場 B_0 に比べて十分小さく無視できるとする。

3) 静磁場 ($B_z = B_0$) 中でコイルを y 軸の周りに回転させた場合 (図 1)

コイルを y 軸の周りに角速度 ω で回転したとき、コイルに流れる電流の時間変化を与えよ。コイルの抵抗を R 、電流の + 方向を図の矢印方向とする。ただし、時刻 $t = 0$ において、コイル面は磁場に垂直であった。

4) 静磁場 ($B_z = B_0$) 中で金属円柱を y 軸の周りに回転させた場合 (図 2)

非磁性金属円柱 ($\mu = \mu_0$) が y 軸上に置かれている。この金属円柱を y 軸を中心に角速度 ω で回転させた。

- xz 平面内の点 $P(x, z) = (r, \theta)$ において y 軸方向に流れる電流の電流密度を求めよ。
- 金属円柱の回転に必要なトルクの大きさを求めよ。

ただし、一様静磁場は円柱の回転により影響を受けず、円柱端の効果は無視できるとする。また、金属の電気伝導率を σ とせよ。

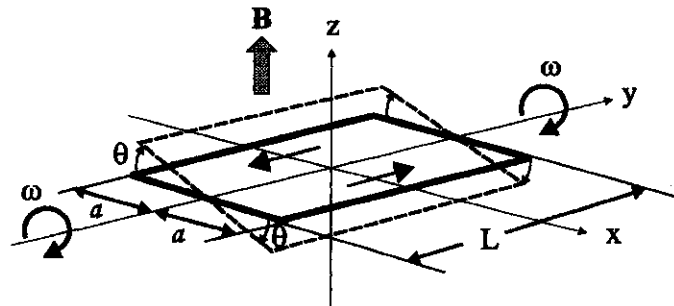


図 1: 一様磁場中の長方形コイル

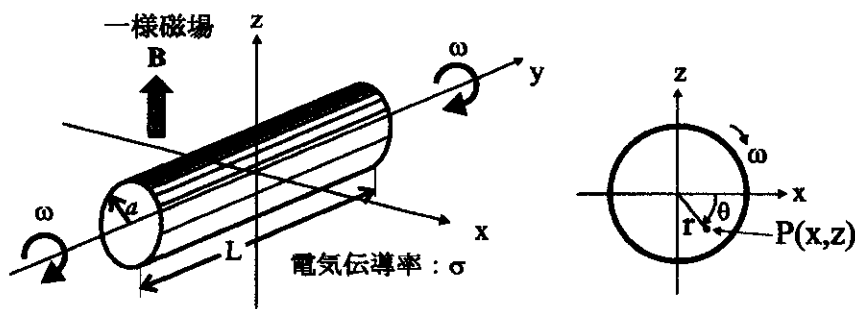
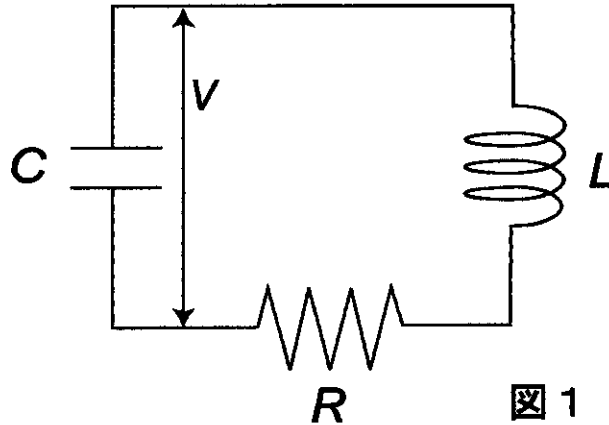


図 2: 一様磁場中の非磁性金属円柱

問題 2

- 1) コンデンサー C 、インダクタンス L 、抵抗 R を図 1 に示すように直列に接続した回路を考える。

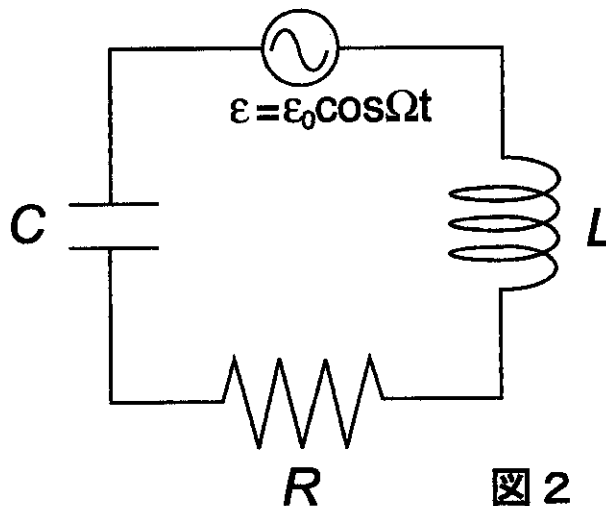


- a) コンデンサーの両端の電圧を V とするとき、 V が満たすべき微分方程式を導出せよ。
 b) 条件

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$$

が満たされているとき、この微分方程式の一般解を求めよ。 $1/LC \equiv \omega_0^2$ 、 $R/2L \equiv \gamma$ と略記してよい。

- c) 設問 b) の条件を満たす図 1 の回路に交流定電圧電源を図 2 に示すように接続する。電源を接続して充分時間が経過した状態では定常解のみを考えればよい。この状態でこの回路に流れている電流の表式を求めよ。



- d) 設問 c) で求めた電流の振幅を Ω の関数として図示し特徴を述べよ。

- 2) 図3に示すように2つのLC回路を抵抗 R ($0 < R < \infty$) によって結合させた系を考える。

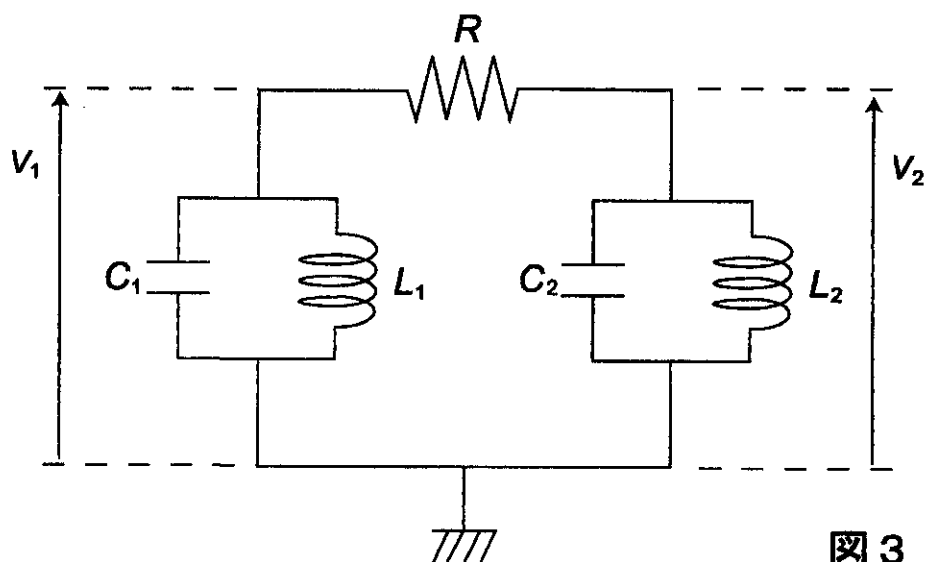


図3

- a) 図3に示すように、各LC回路の電圧を V_1 、 V_2 とするとき連立微分方程式

$$\dot{V}_2 - \dot{V}_1 = \frac{R}{2} \left[\frac{V_1}{L_1} + C_1 \ddot{V}_1 - \frac{V_2}{L_2} - C_2 \ddot{V}_2 \right] \quad (\text{A})$$

$$\frac{V_1}{L_1} + C_1 \ddot{V}_1 + \frac{V_2}{L_2} + C_2 \ddot{V}_2 = 0 \quad (\text{B})$$

が成立つことを示せ。ただし $\dot{x} \equiv dx/dt$ 、 $\ddot{x} \equiv d^2x/dt^2$ である。

- b) 条件

$$L_1 = L_2 \equiv L, \quad C_1 = C_2 \equiv C, \quad LC > \frac{L^2}{R^2}$$

が満たされているときを考える。 V_1 および V_2 の時間依存性を $V_1 \propto e^{j\omega t}$ 、 $V_2 \propto e^{j\omega t}$ (ただし、 $j^2 = -1$) と仮定し、上記(A)、(B)を用いて、 ω を求めよ。 $1/LC \equiv \omega_0^2$ と略記してよい。

- c) 設問b)で得た ω に対応して、図3の回路でどのような振動が生じているかを考察し、特徴を述べよ。

問題 1 と問題 2 は別々の解答用紙に解答せよ。

問題 1

内部が真空に保たれた、1辺の長さが L の密閉した立方体の箱（体積 $V=L^3$ ）に閉じ込められて、温度が T で熱平衡に達した電磁波（空洞放射）について考える。振動数 ν の電磁波は、波動としての性質と同時に、エネルギー $\varepsilon=h\nu$ (h はプランク定数) の粒子、光子としての性質も示す。ここでは、空洞放射を光子の気体と考える。

以下の問いに答えよ。ただし、結果だけでなく、考え方や計算の過程も記せ。

- 1) 単原子分子気体の気体分子運動論にならい、

$$PV = \frac{1}{3}U$$

を導け。ここで、 P は光子気体が箱の壁に及ぼす圧力、 U は光子気体の内部エネルギーである。なお、エネルギー ε の光子の運動量の大きさは ε/c (c は光速) である。また、光子と箱の壁との衝突は弾性衝突であるとし、光子同士の衝突は無視できるものとする。

- 2) a) マックスウエルの関係式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

を導け。ここで、 S は光子気体のエントロピーである。

- b) 前問 2-a) を用いて、

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

となることを示せ。

- c) 熱平衡状態における光子の数は、系の体積と温度で決まる。同様に、光子気体の内部エネルギー U も、系の体積と温度で決まる。このことと、 U が示量性変数であることから、 $U/V = u(T)$ は、体積 V にはよらず、温度 T のみの関数となる。これより、前問 1)、2-b) を用いて、 $u(T) \propto T^4$ となることを示せ。

- 3) 1個の光子の状態は、運動量と偏り（偏光）とによって指定される。光が横波であることから、偏りとしては、ある運動量に対して2つの状態が可能である。この結果、振動数が ν と $\nu+d\nu$ の間の光子の状態数 $D(\nu)d\nu$ は、

$$D(\nu)d\nu = \frac{8\pi V}{3} \nu^2 d\nu$$

となる。また、光子がボース粒子であることから、振動数が ν の光子の数の期待値は、次式で与えられる。

$$n_\nu = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

以下、振動数が ν と $\nu+d\nu$ の間の光子が、温度 T でもつ単位体積あたりのエネルギーを $u(\nu, T)d\nu$ と表す。

- $u(\nu, T)$ を具体的に書き下せ。
- $u(\nu, T)$ が最大値をとる ν を ν_{\max} 、このときの $u(\nu, T)$ を u_{\max} と表す。 ν_{\max} 、 u_{\max} は、それぞれ温度 T のある「べき乗」に従って温度変化する。これらの「べき」を求めよ。
- $u(\nu, T)$ を用いて、温度 T の光子気体の単位体積あたりのエネルギー $u(T) = U/V$ が、 $u(T) \propto T^4$ となることを示せ。

物理学II

問題2

スピン1の磁性イオンを含む結晶を取り上げる。座標系を適当に選んだときに、1個のスピン
のエネルギーが次のハミルトニアンで与えられる場合を考える：

$$\mathcal{H}_0 = \Delta(1 - S_z^2). \quad (1)$$

ただし、 Δ は正の定数である。

この系に z 軸に平行で大きさ H の磁場を印加した場合、1個のスピン
のハミルトニアンは次のようになる：

$$\mathcal{H} = \Delta(1 - S_z^2) - \mu H S_z. \quad (2)$$

ただし、 μ は正の定数と仮定する。この場合、エネルギー固有状態はスピン
の z 成分 S_z の値 1、0、-1 により指定され、エネルギー準位は下図のようになる：

$$S_z = 0 \quad \text{————} \quad \Delta$$

$$\begin{array}{l} S_z = -1 \quad \text{————} \quad \mu H \\ S_z = 1 \quad \text{————} \quad -\mu H \end{array}$$

以上、1個のスピンの場合について説明したが、結晶中にこれと同種のスピンが N 個あるものとする。以下の議論では、スピン間の相互作用エネルギーは無視し、系を理想系として扱う。また、パラメタ Δ に対応する特性温度を $\Theta = \Delta/k_B$ と記す (k_B はボルツマン定数)。

温度 T において、1個のスピンが3個の状態 1、-1、0 をとる確率をそれぞれ P_+ 、 P_- 、 P_0 とする。このとき、系の磁化は1個のスピン当たり $m = \mu(P_+ - P_-)$ として与えられる。また、ゼロ磁場帯磁率 χ は次式で定義される：

$$\chi = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{m}{H}. \quad (3)$$

以下の問題で、図を描くことが求められている場合には、概略図を示すだけでよい。

1) まず、 $H = 0$ の場合から考える。以下の問題は、パラメタ Δ の代わりに特性温度 Θ を用いて答よ。

- 確率 P_+ 、 P_- 、 P_0 を求めよ。また、 $P_1 \equiv P_+ + P_-$ として P_1 の温度依存性を図示せよ。
- 系のエネルギー $E = E(T)$ を求めよ。
- 系の熱容量を求め、その温度依存性を図示せよ。
- 系のエントロピー $S = S(T)$ を求めよ。また、エントロピーの低温極限值 $S(0)$ と高温極限值 $S(\infty)$ を求めよ。

2) 次に、 $H \neq 0$ の場合を考える。この場合、エントロピーなどの熱力学量は磁場に依存する。議論を簡単にするために、ここでは $\mu|H| \ll \Delta$ を仮定する。

以下の小問は、d) を除いて、条件 $T \ll \Theta$ を満たす温度範囲に限定して考える。この場合、系は2つの準位 $\pm\mu H$ を持つ理想2準位系として扱うことができる。

- a) エントロピー $S(T, H)$ を求めよ。
- b) 磁場 H を固定し、 $S(T, H)$ を温度の関数として図示せよ。
- c) 磁化 $m(T, H)$ を求め、その結果を用いて、ゼロ磁場帯磁率を計算せよ。
- d) 条件 $T \ll \Theta$ を仮定しない場合のゼロ磁場帯磁率を求めよ。

□

3) 温度 T 、磁場 H の状態から出発し、系を断熱状態に保ちながら磁場を徐々に減少させることを断熱消磁と呼ぶことにする。断熱消磁は、熱力学的には準静的過程である。以下の問題は、問2 a)、b)、c) の場合と同様、系を理想2準位系として扱うことができる範囲で考えよ。

- a) 断熱消磁の終状態の磁場を H' ($H' < H$) とする。この磁場の場合のエントロピー $S(T, H')$ の温度依存性を問2 b) の図に点線で書き加えよ。
- b) 終状態の温度 T' は、 H' の他に始状態の温度 T と磁場 H にも依存する。系のエントロピー $S(T, H)$ が T と H の関数として既知の場合、 T' を決定する方程式を書き下せ。
- c) 問2 a) で得られたエントロピー $S(T, H)$ を用いると、次式が成り立つことを示せ：

$$T' = \frac{H'}{H} T. \quad (4)$$

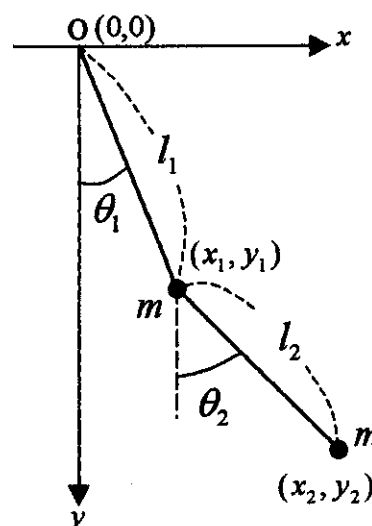
- d) 前問の結果を用いると、 $H' = 0$ の場合、 $T' = 0$ となるから、断熱消磁により絶対零度に到達できることになる。このことは、熱力学第3法則に反する。このような誤った結論が導かれた理由について説明せよ。

物理学III

問題

図のように固定点 O からつるした長さ l_1 の糸の先に質量 m の質点をつけ、さらにその先に長さ l_2 の糸をつけて質量 m の質点をつける。糸の質量は無視できるものとする。この2重振り子を一つの鉛直面内（紙面内）で糸がたわむことなく振動させた場合を考える。

2本の糸が鉛直方向とつくる角をそれぞれ θ_1, θ_2 とし、それらの時間微分を $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ と表わす。ここでは $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ と見なせるような微小振動のみを考えることにする。重力加速度の大きさは g とする。



- 1) この系の振動時における運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U を $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ についての2次項まで求め、ラグランジュ関数 L を導け。
- 2) 各質点の運動方程式を求めよ。
- 3) この系は2つの基準振動をもつ。それぞれの角振動数を求めよ。
- 4) $l_1 \gg l_2$ とした場合について、2つの基準振動をそれぞれ調べてみる。
 - a) 微小量 l_2/l_1 についての近似を行い、角振動数および θ_1/θ_2 を求めよ。
 - b) 各質点の水平方向の振れ x_1 と x_2 の関係を求め、それぞれの振動の特徴を説明せよ。
- 5) 逆に $l_1 \ll l_2$ とした場合について調べてみる。
 - a) 微小量 l_1/l_2 についての近似を行い、角振動数および θ_1/θ_2 を求めよ。
 - b) 各質点の水平方向の振れ x_1 と x_2 の関係を求め、それぞれの振動の特徴を説明せよ。

物理学 IV

問題1と問題2は別々の答案用紙に解答すること。

問題1

一次元空間を運動する質量 m の粒子の散乱問題に関する以下の問に答えよ。ただし、粒子の座標を x とするとき、ポテンシャルエネルギー $V(x)$ は

$$\begin{aligned} V(x) &= V & x \geq 0 \\ &= 0 & x < 0 \end{aligned} \quad (1)$$

で与えられ、粒子はエネルギー E で $x = -\infty$ の領域から正の向きに入射するものとする。また、 $V > 0$ である。

- 1) $x < 0$ の領域では、波動関数の空間部分 $\psi(x)$ は

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (2)$$

と書くことができる。ただし、 A, B は定数、 $k (k > 0)$ は入射波数で

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E \quad (3)$$

で与えられる。

反射波と入射波の振幅の比 $r = B/A$ を、入射エネルギー E が V より小さい場合に対して、 V と E の関数として求めよ。

- 2) 対応する波動関数の大まかな振る舞いを全空間に渡って図示せよ。また、作図に当たって留意した点を簡条書きせよ。
- 3) 入射エネルギー E が V より大きい場合の反射確率 $R = |r|^2$ を求め、透過確率 $T = 1 - R$ を V と E の関数として表せ。
- 4) 問1) 及び問3) の結果を用いて、透過確率 T を E の関数として全エネルギーに渡って図示せよ。その際、 E が V の近傍、及び、 V よりはるかに高い漸近領域での T の振る舞いに留意せよ。
- 5) 入射エネルギー E が V より大きい場合の透過確率は、透過波の振幅から直接求めることもできる。それに関して以下の問いに答えよ。

- (a) 波動関数の空間部分が

$$\psi(x) = Ae^{ikx} \quad (4)$$

で表される定常的な流れに対する確率の流れの密度 j を、 \hbar, m, k, A を用いて表せ。ただし、 A は定数である。

- (b) 透過確率は、 x が $+\infty$ の領域における確率の流れの密度 j_{out} と x が $-\infty$ の領域で入射してくる確率の流れの密度 j_{in} の比 j_{out}/j_{in} で与えられる。それらの比から求めた透過確率が問3) で反射確率を使って求めた値と一致することを示せ。

問題 2

2次元のハミルトニアン

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{\omega^2}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \quad (1)$$

を考察する。ここで、 ω は正の定数。 \hat{p}_x, \hat{p}_y はそれぞれ \hat{x}, \hat{y} の共役運動量演算子を表すものとする。

以下では、演算子 \hat{a}_x, \hat{a}_y を

$$\hat{a}_x \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} + i\hat{p}_x), \quad \hat{a}_y \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{y} + i\hat{p}_y), \quad \hat{a}_x^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} - i\hat{p}_x), \quad \hat{a}_y^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{y} - i\hat{p}_y),$$

と定義し、これらの演算子を用いてハミルトニアン \hat{H}_0 の固有状態を議論する。

1) 演算子 $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$ の交換関係を計算すると

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0, \quad [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \quad (2)$$

となる。(ここで、添字 i, j は x, y の値をとるものとし、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表す。)

$i = j = x$ の場合について、式(2)を具体的に確かめよ。

2) ハミルトニアン \hat{H}_0 を $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$ を用いて書き表し、交換関係

$$[\hat{H}_0, \hat{a}_i], \quad [\hat{H}_0, \hat{a}_i^\dagger], \quad (i = x, y)$$

を計算せよ。

3) ハミルトニアン \hat{H}_0 の基底状態 $|0\rangle$ が $\hat{a}_i|0\rangle = 0$ ($i = x, y$)を満たすことを示し、そのエネルギー固有値 $E_0^{(0)}$ を求めよ。さらに、状態 $\hat{a}_i^\dagger|0\rangle$ がエネルギーの固有状態であることを示し、そのエネルギー固有値を求めよ。

4) \hat{H}_0 に ϵ に比例する摂動項が加わる場合

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \epsilon\hat{H}_I$$

を考える。

このハミルトニアンの基底状態のエネルギー固有値 $E_0(\epsilon)$ を ϵ の2次までの摂動で求めると

$$E_0(\epsilon) = E_0^{(0)} + \epsilon\langle 0|\hat{H}_I|0\rangle + \epsilon^2 \sum_{n \neq 0} \langle 0|\hat{H}_I|n\rangle \frac{1}{E_0^{(0)} - E_n^{(0)}} \langle n|\hat{H}_I|0\rangle + O(\epsilon^3) \quad (3)$$

となることが知られている。(この式ではハミルトニアン \hat{H}_0 のエネルギー固有状態とそのエネルギー固有値を整数 n で番号づけし、それぞれ $|n\rangle, E_n^{(0)}$ と表してある。特に $n=0$ は \hat{H}_0 の基底状態に対応するものとする。)

ハミルトニアンの摂動項 \hat{H}_I を

$$\hat{H}_I = \omega^2 \hat{x}\hat{y}$$

と与えるとき、基底状態のエネルギーを式(3)を用いて ϵ の2次までの精度で求めよ。

5) 前問のハミルトニアンの第1励起状態のエネルギーを、摂動論を用いて ϵ の1次の精度で求めよ。

6) 問4)のハミルトニアン($\hat{H} = \hat{H}_0 + \epsilon\hat{H}_I, \hat{H}_I = \omega^2 \hat{x}\hat{y}$)の基底状態のエネルギー固有値を、摂動論を用いなくて厳密に求めよ。

また、このハミルトニアンの ϵ による摂動計算が収束するために必要な条件を、パラメータ ϵ について求め、その物理的解釈を述べよ。

物 理 学 V

- ◎ 物理学Vは5問の中から、2問を解答する選択問題です。
- ◎ 問題番号1から問題番号5までの中から、2問を選択して別々の解答用紙に解答しなさい。
- ◎ 問題番号3、問題番号5は、それぞれ問題用紙が2枚になっています。
- ◎ 解答用紙には、受験番号を記入し、選択した問題番号を○で囲むこと。

物理学 V

問題 1

1) ローレンツ変換は2つの慣性系間の関係を与える。このうち、座標の原点 $t = \vec{x} = 0$ が共通の2慣性系を結ぶ変換を斉次ローレンツ変換と呼ぶ。以下4元ベクトル記法 $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ 等を用いる。

- a) 2つの座標系間の変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ が斉次ローレンツ変換であるためには変換係数 $\Lambda^\mu{}_\nu$ はどのような関係をもたせよ。この関係式の由来をローレンツ変換を特徴づける性質にもとづいて説明せよ。
- b) 2階反対称テンソル $T^{\mu\nu}$ は、 $T^{\nu\mu} = -T^{\mu\nu}$ という性質をもつ。この性質が斉次ローレンツ変換のもとで変わらないことを証明せよ。

2) 四元ポテンシャル $A^\mu(t, \vec{x}) = (\phi/c, \vec{A})$ [SI, CGS では (ϕ, \vec{A})] が $A^\mu = a\epsilon^\mu \cos(\omega t - kz)$ で与えられる状態を考える。ここで $a, \omega > 0, k > 0$ は適当な次元を持つ定数、 ϵ^μ は定数の四元ベクトルで偏極ベクトルと呼ばれる。

- a) $\epsilon^\mu = (0, 1, 0, 0)$ とするとき、この四元ポテンシャルの表す電場と磁束密度を求め、これがどのような物理的状態を表しているか述べよ。
- b) この状態が(真空中の)マックスウェル方程式を満たすためには、 ω と k の間どのような関係があればよいか。以下この関係を用いて ω を k で表す。
- c) ω と k はまとめて四元ベクトル $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$ [$\vec{k} = (0, 0, k)$] をなし、これを波数ベクトルと呼ぶ。さて、今の座標系 $x^\mu = (ct, \vec{x})$ を S 系と呼び、この系に対し z 方向に速度 $v_0 = c/3$ で等速運動している座標系 S' を考える。 S と S' の原点は $t = t' = 0$ で一致しているものとする。このとき、 S' 系における対応する波数ベクトル k' 、偏極ベクトル ϵ' を求めよ。
- d) さらに、 S' 系に対し、 $-x'$ 方向に速度 $v_1 = c/\sqrt{2}$ で等速運動している系を S'' とする。 $(S'$ 系の x' 軸と S'' 系の x'' 軸は一致し、2つの原点はやはり $t' = t'' = 0$ で一致しているとする。) S'' 系における k'' 、 ϵ'' を求めよ。これはどのような物理的状態を表しているか述べよ。
- e) 今度は、もとの S 系を y 軸回りに x から z に向かって 45° 回転した座標系 R を考える。この座標系 R における波数ベクトル k_R 、偏極ベクトル ϵ_R を求めよ。これはどんな状態に対応しているか。
- f) (d) と (e) の結果を比較して、その物理的解釈を述べよ。

物理学 V
問題 2

スピン1/2を持つ系に磁場 $\mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)$ が加えられている。ただし $H_x \geq 0, H_z \geq 0$ とする。この系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = 2\mu_B \mathbf{H} \cdot \mathbf{s}$$

で与えられる。ここで、 μ_B はボーア磁子、 \mathbf{s} はスピン演算子である。 \mathbf{s} は 2×2 の行列を用いて

$$s_x = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \begin{pmatrix} 0 & -i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

と表される。以下の問に答えよ。

- 1) ハミルトニアンの固有値を求め、エネルギー準位の分裂は、 \mathbf{H} の大きさと向きに対してどのように依存するかを述べよ。
- 2) 量子化軸を z 軸に選ぶと、任意のスピン状態は、上向きの状態 $|\uparrow\rangle$ と下向きの状態 $|\downarrow\rangle$ の線形結合で与えられる。この系の固有状態を $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ を用いて表せ。
- 3) スピンが基底状態にあるものとする。 H_z を一定に保ちつつ、 x 軸方向の磁場 H_x を時刻 $t_0 = 0$ で 0 にする。この操作をした後の任意時刻 t で、スピンの上を向いている確率 $P_\uparrow(t)$ 、および x 軸の正方向を向いている確率 $P_x(t)$ を求めよ。特に $H_z \gg H_x > 0$ と $0 < H_z \ll H_x$ のそれぞれの場合について、 $P_\uparrow(t)$ と $P_x(t)$ のグラフを書け。
- 4) このようなスピンの多数ある系を、一定磁場 $\mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)$ の下におき、温度を有限な値 T に保つ。 z 軸方向のスピンあたりの磁化 $m_z = -2\mu_B \langle s_z \rangle$ 、および x 軸方向の磁化 $m_x = -2\mu_B \langle s_x \rangle$ を求めよ。ここで、物理量 O の熱平均を $\langle O \rangle$ と表した。

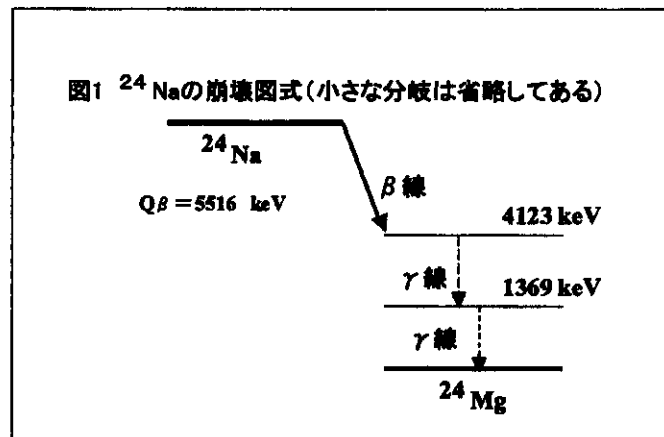
物理学V

問題3

原子核や素粒子実験においては、その構造を調べるための探針として、粒子加速器によって加速された粒子を対象物に衝突させ、衝突の際発生する各種粒子（中性子、陽子、パイオン、ガンマ線等）や残留生成核が出す放射線（アルファ線、ベータ線、ガンマ線等）を測定することによって原子核・素粒子の構造を調べている。

- 1) このような原子核反応を発生させることが出来る加速器を一つ挙げ、その加速原理、加速ビームの特徴、加速エネルギーの上限を決めている要因、及び原子核のどのような面が調べられるか？ について300字以内で述べよ。

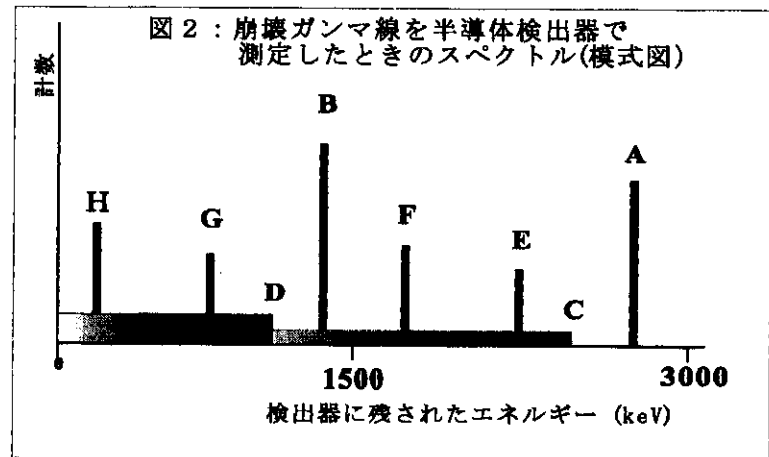
- 2) 加速器を用いた実験においては周辺構造物中に、残留放射能が生成される。その一つとして、コンクリート中のナトリウム23 (^{23}Na) が中性子を吸収して、ナトリウム24 (^{24}Na) になることがある。このナトリウム24 (^{24}Na) は図1のようにベータ線、ガンマ線を放出してマグネシウム24 (^{24}Mg) に崩壊する（ここでは主要な崩壊のみを記してある）。



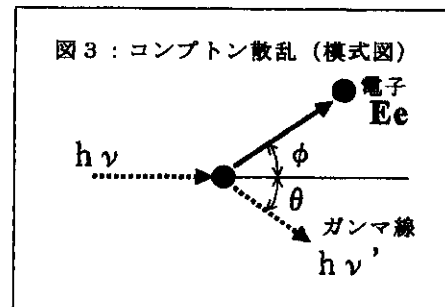
この崩壊に伴うベータ線、ガンマ線を薄い窓を持つ有る有限の体積を持ったGe半導体検出器で測定した。ガンマ線は物質中の原子及び軌道電子と相互作用を起こして、あるエネルギーをもった電子を生成する。この電子は更に物質中の原子と相互作用をし、電子のエネルギーに比例した数の電子-イオン対を生成する。半導体検出器、シンチレーション検出器などは、この電子-イオン対の総量を電流または電圧に変換して、検出器中でガンマ線によって発生した電子のエネルギーを測定するものである。したがって、有限の大きさの検出器では、散乱したガンマ線が検出器より飛び出すことも有り、入射ガンマ線の全エネルギー量を測定しているものではない。本問では、ガンマ線は検出器中では2回以上の散乱吸収といった相互作用を行わない大きさのものとして考える。

図2は測定の際、ベータ線を止めるため検出器前面をカバーするように10mmのアルミニウム板をおいた場合に得られたガンマ線のエネルギースペクトルの模式図である。

ガンマ線（光子）がゲルマニウム結晶中の原子と相互作用した結果として、光電効果によるもの（A,B）、コンプトン散乱によるもの（C,D）、電子-陽電子対生成によるもの（E,F,G,H）の計6本の「ピーク」及び最大エネルギーC、Dを持った2つの「連続分布」が現れている。



- a) コンプトン散乱はガンマ線のように入射光子のエネルギーが大きくなり、光子と束縛電子の衝突が、光子と自由電子との衝突として考えることのできる散乱現象である。それは図3のようにあらわすことができる。散乱後の電子及び光子のエネルギーを求める式を図3の記号を用いて導出せよ。



反跳電子によって検出器に残されたエネルギーは、散乱されたガンマ線が検出器より飛び出し全てのエネルギーを検出器内に残さない事象も存在する為、図2に示すように連続の分布を示す。その最大エネルギーの部分であるCのエネルギー値を定めよ。(電子の静止質量は511 keVとし、単位はMeVで表し、有効数字2桁まで求めよ。)

- b) 図2におけるピークはガンマ線がGe原子と光電効果、電子-陽電子対生成などの相互作用を起こし、あるエネルギーをもった電子が放出または生成されることに起因している。光電効果、電子-陽電子対生成の各過程を説明せよ。
また、各過程で生成する電子のエネルギーを求め、図2中の「ピーク」の部分A、B、E、F、G、Hのエネルギー値を定めよ。(GeのK殻電子の電離電圧はIとする。ただし、エネルギー値を定める際はその値は小さいので無視してよい。単位はkeVで表し、小数点以下は切り捨ててよい)
- c) 本測定でのガンマ線及び検出器内での散乱ガンマ線を十分阻止できるほど大きな検出器が得られたとすると図2のスペクトルはどう変わるか、略図を描いて説明せよ。
- d) ガンマ線は真空中では、電子-陽電子対生成を起こしえない。その理由を説明せよ。

物理 V

問題 4

固体の電子分極の分散を半古典的モデルで考える。

- 1) 体積電荷密度 ρ で一様に $-e$ ($= \int_V \rho dv$: V は球の体積) に帯電した半径 R の球状空間を考える。
 - a) 静電場 E を球の中心からの距離 r の関数として求めよ。ただし、 $r \leq R$ とし、真空誘電率を ϵ_0 とせよ。
 - b) その球内でそれと反対符号の質量 M の点電荷が球面から出発して、 x 軸上を静電引力により中心に向かっていくときの力 F が $F = -kx$ (k は正の定数、 x は中心からの距離) であることを導け。

- 2) 固体は原子またはイオンからできている。原子やイオン中の電子状態は波動関数を用いて表せる。そこで、原子のモデルとして、 $+e$ の点電荷を持った核の周りに、球内に ρ で一様分布した電子 (電荷: $-e$ 、質量: m) を考える。核の質量は電子の質量に比べて十分大きいので、核は動かないものとして取り扱える。
 - a) この原子を交流電場中に置いたときの運動を考える。交流電場を $E_0 e^{i\omega t}$ とし、電子の電場方向の運動方程式を示せ。ただし、電子の振動は速度に比例する抵抗力 ($F = m\gamma \dot{x}$ 、 γ : 定数) を受けるものとする。*)
 - b) 電子の変位の時間変化 $x(t)$ を、 $x(t) = Ae^{i\omega t}$ となる特殊解として求めよ。

- 3) 体積 V 中に N 個の原子がある固体では、お互いの原子同士の相互作用はないものとするれば、分極は、 $P = -Nex/V$ で与えられる。
 - a) 複素誘電率 ϵ を求めよ。
 - b) 複素誘電率 ϵ の実数部と虚数部の式を示し、その周波数 (ω) 依存性を模式的に図示せよ。なお、実数部については、最大値、最小値は求めなくて良いが、 $\omega = 0$ および ∞ の値と、 $\epsilon = \epsilon_0$ になる ω の値を示せ。また、虚数部については、最大値を与える ω の値のみ示せ。
 - c) ここで求めた複素誘電率を測定する実験方法を示して説明せよ。
 - d) 固体ではこの他 2 つの誘電分散がある。名前を挙げ、何故そのような分極率の分散が起こるか簡単に述べよ。
 - e) ここで求めた電子分極のみを示す物質はどのような物質かを示せ

*) 注: 振動している電子はエネルギーを放出して減衰するので、このことを現象論的に表すと

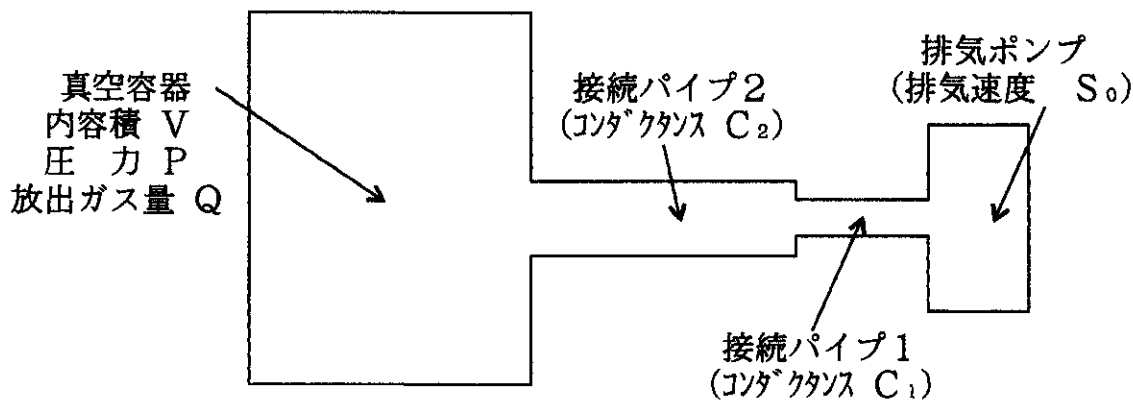
2) a) の問題設定の文章のように、電子の振動は速度に比例する抵抗力を受けることになる。

物理学V

問題5

図のように、接続パイプ1と接続パイプ2で、真空容器に排気ポンプを接続し、到達圧力 P になった真空系について問に答えよ。

この真空容器の内容積を V 、放出ガス量を Q 、排気ポンプの排気速度を S_0 、接続パイプのコンダクタンスを C_1 、 C_2 とする。



- 1) 真空ポンプの名前を一つ挙げ、そのポンプの動作原理、使用できる真空の範囲、を述べよ。
- 2) コンダクタンスとはパイプの中を通過する気体の通りやすさを示す量である。接続パイプ1と接続パイプ2をあわせた全コンダクタンス C を求めよ。
- 3) 接続パイプ2と真空容器の接続位置、すなわち真空容器の入口での実効排気速度 S を求めよ。
- 4) この真空容器の到達圧力 P を求めよ。
- 5) 到達圧力を下げるにはどのようなことをすればよいか、 Q 、 S_0 、 C との関連で述べよ。

この真空容器の真空度を測定する熱陰極電離真空計について答えよ。

熱陰極電離真空計は図のような構造をしており、グリットの電圧を一定にし、一定量の電子を流し、このときコレクターに流れるイオン電流から気体の分子密度を求めることにより真空度を測定する。

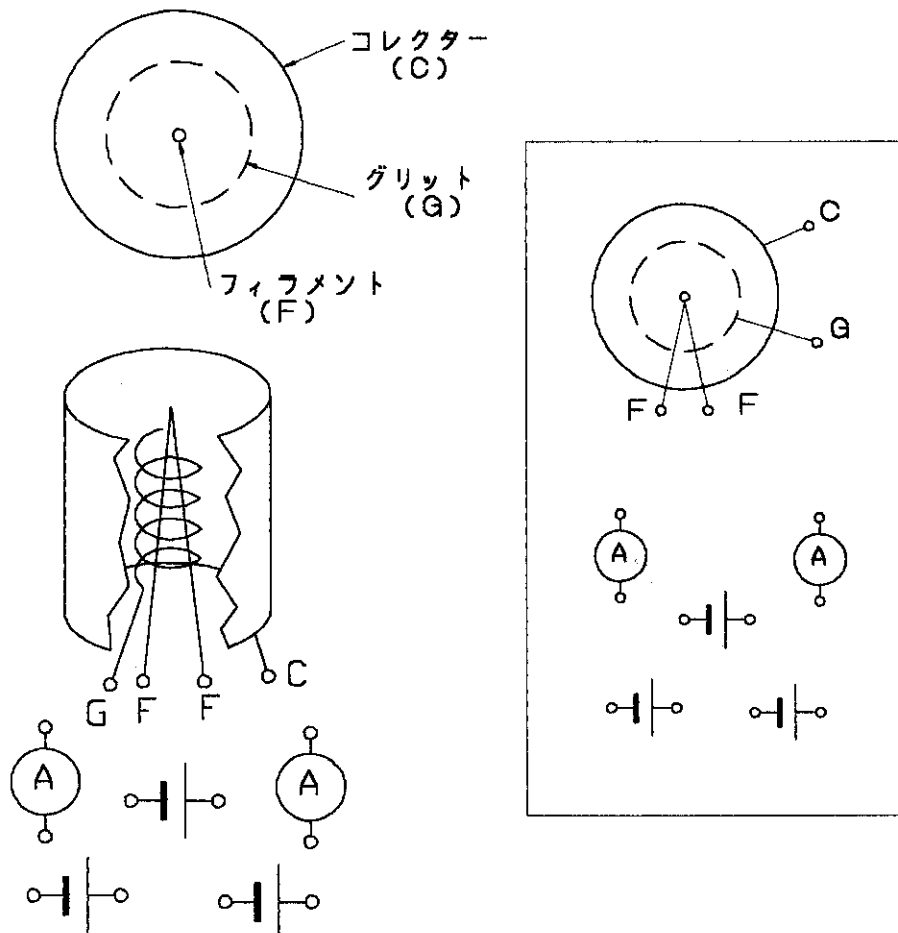
6) 温度 $T = 300\text{ K}$ で、真空度 $P = 1 \times 10^{-4}\text{ Pa}$ での 分子密度 n はいくらか。
ただし、ボルツマン定数は $k = 1.4 \times 10^{-23}\text{ Pa} \cdot \text{m}^3/\text{K}$ とする。

7) 図に示した電源、電流計とグリット、フィラメント、コレクターを配線せよ。
解答用紙には、右下の枠に囲まれた図（上から見た図と電流計2個、電池3個）を書き写し、それらの間を結線せよ。

8) 電子の走る距離 l 、気体分子の密度 n 、電子電流 I_e 、電子が走る単位長さあたり生成されるイオンの数 σ を用い、イオン電流と真空度の関係を示せ。

9) このような真空計は気体の種類によって感度が異なるが、それは何故か。

上から見た図



問題1と問題2は別々の解答用紙に解答せよ。

問題1 次の英文*を読んで1)～5)の質問に答えよ。

Our present understanding of superconductivity has arisen from a close interplay of theory and experiment. It would have been very difficult to have arrived at the theory by purely deductive reasoning from the basic equations of quantum mechanics. [1] Even if someone had done so, no one would have believed that such remarkable properties would really occur in nature. But, as you well know, that is not the way it happened, a great deal had been learned about the experimental properties of superconductors and phenomenological equations had been given to describe many aspects before the microscopic theory was developed. [2] Some of these have been discussed by Schrieffer and by Cooper in their talks.

My first introduction to superconductivity came in the 1930's and I greatly profited from reading David Shoenberg's little book on superconductivity, which gave an excellent summary of the experimental findings and of the phenomenological theories that had been developed. At that time it was known that superconductivity results from a phase change of the electronic structure and the Meissner effect showed that thermodynamics could be applied successfully to the superconductive equilibrium state. The two fluid Gorter- Casimir model was used to describe the thermal properties and the London brothers had given their famous phenomenological theory of the electrodynamic properties. Most impressive were Fritz London's speculations, given in 1935 at a meeting of the Royal Society in London, that superconductivity is a quantum phenomenon on a macroscopic scale. He also gave what may be the first indication of an energy gap when he stated that " the electrons be coupled by some form of interaction in such a way that the lowest state may be separated by a finite interval from the excited ones. " [3] He strongly urged that, based on the Meissner effect, the diamagnetic aspects of superconductivity are the really basic property.

* Nobel Lecture by John Bardeen

My first abortive attempt to construct a theory, in 1940, was strongly influenced by London's ideas and the key idea was small energy gaps at the Fermi surface arising from small lattice displacements. However, this work was interrupted by several years of wartime research, and then after the war I joined the group at the Bell Telephone Laboratories where my work turned to semiconductors. It was not until 1950, as a result of the discovery of the isotope effect, that I again began to become interested in superconductivity, and shortly after moved to the University of Illinois.

The year 1950 was notable in several respects for superconductivity theory. The experimental discovery of the isotope effect and the independent prediction of H. Froehlich that superconductivity arises from interaction between the electrons and phonons (the quanta of the lattice vibrations) gave the first clear indication of the directions along which a microscopic theory might be sought. [4] Also in the same year appeared the phenomenological Ginzburg-Landau equations which give an excellent description of superconductivity near T_C in terms of a complex order parameter, as mentioned by Schrieffer in his talk. Finally, it was in 1950 that Fritz London's book on superconductivity appeared. This book included very perceptive comments about the nature of the microscopic theory that have turned out to be remarkably accurate. [5] He suggested that superconductivity requires " a kind of solidification or condensation of the average momentum distribution." He also predicted the phenomenon of flux quantization, which was not observed for another dozen years.

註) Fritz London、H. Froehlich : 人名
the Royal Society in London : ロンドンの王立協会

- 1) 下線部 [1]を和訳せよ。
- 2) 下線部 [2]を和訳せよ。
- 3) 下線部 [3]を和訳せよ。
- 4) 下線部 [4]を和訳せよ。
- 5) 下線部 [5]を和訳せよ。

問題 2

空がなぜ青く見えるのかを英語で簡単に説明したい。以下の指示に従って説明文を完成させよ。

1) はじめに、説明文の前半となる次の文章を英訳せよ。

「大気中を進む光は、さまざまな粒子と相互作用する。可視光の大気中での散乱確率は、近似的に λ^{-4} に比例する。ここで、 λ は光の波長である。このことは、波長の短い光の方が散乱されやすいことを意味する。」

2) 前半に続くように、説明文を完成させよ。