

平成14年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期2年の課程入学試験

# 物 理 学 専 攻

## 筆 記 試 験 問 題

《平成13年8月28日（火）・29日（水）実施》

東北大学大学院理学研究科物理学専攻

問題 1 と問題 2 は別々の解答用紙に解答せよ。

問題 1

各自、解答用紙の最初に使用する単位系を明示してから、解答しなさい。  
 なお、この問題1の以下の式中では  $c$  は光速である。また、MKSA 単位系では真空中の誘電率を  $\epsilon_0$ 、透磁率を  $\mu_0$  でそれぞれあらわす。

1) 真空中において、図1のように  $z$  軸上の  $(0, 0, \ell/2)$  および  $(0, 0, -\ell/2)$  の位置にそれぞれ  $+q$ 、 $-q$  に帯電した導体球がある。導体球は十分小さくて点電荷とみなせるとする。

a)  $x$  軸上の点  $P(r, 0, 0)$  における電場  $E$  の  $x, y, z$  成分  $E_x, E_y, E_z$  を求めよ。

b) 図1の2つの導体球を直線の導線で接続する。導線を電流が流れ、 $z$  軸上の  $(0, 0, \ell/2)$  および  $(0, 0, -\ell/2)$  の位置の電荷の大きさは時間  $t$  に依存し、それぞれ  $+q(t)$ 、 $-q(t)$  であらわされる。導線の抵抗が大きく、電荷の大きさの変化は十分緩やかで、周囲の電場は各時刻  $t$  で  $+q(t)$ 、 $-q(t)$  による静電場であらわすことができるものとする。

イ) 各時刻  $t$  での導線に流れる電流  $I(t)$  および  $x$  軸上の点  $(r', 0, 0)$  での変位電流（電束電流）密度<sup>注)</sup>の  $x, y, z$  成分を  $q(t)$  を用いてあらわせ。ただし、 $I(t)$  の符号は  $-z$  から  $+z$  方向に流れる場合を正とする。

注) 真空中での変位電流密度は MKSA 単位系および CGS 単位系でそれぞれ以下のように与えられる。

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(t)}{\partial t} \quad (\text{MKSA}) \qquad \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}(t)}{\partial t} \quad (\text{CGS})$$

ロ) マックスウェル-アンペールの法則を用いて、時刻  $t$  での  $x$  軸上の点  $P(r, 0, 0)$  における磁束密度  $\mathbf{B}(t)$  の  $x, y, z$  成分  $B_x(t), B_y(t), B_z(t)$  を  $q(t)$  を用いてあらわせ。

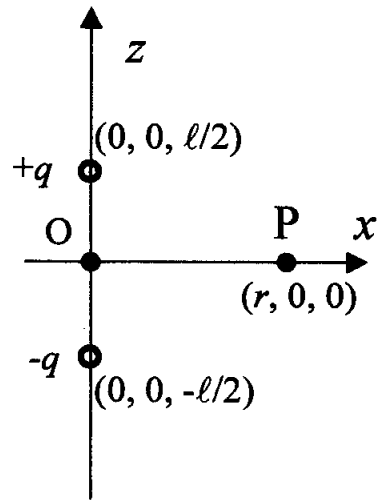


図 1

2) 問1)-a)において、帯電した導体球が点電荷とみなせるとする。図2に示すように、原点から点Qまでの距離を  $r$ 、原点と点Qを結ぶ直線OQとz軸のなす角を  $\theta$  とする。 $r \gg l$  の時、 $l$  の1次までの項を取ると、点Qでの静電ポテンシャルが電気双極子モーメントの大きさ  $ql$  を用いて

$$V \equiv \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \quad (\text{MKSA})$$

$$V \equiv \frac{ql}{r^2} \cos\theta \quad (\text{CGS})$$

で与えられることを示せ。ただし、ここでは点電荷による静電ポテンシャルが  $r \rightarrow \infty$  で零になるようにポテンシャルの零点を選んである。

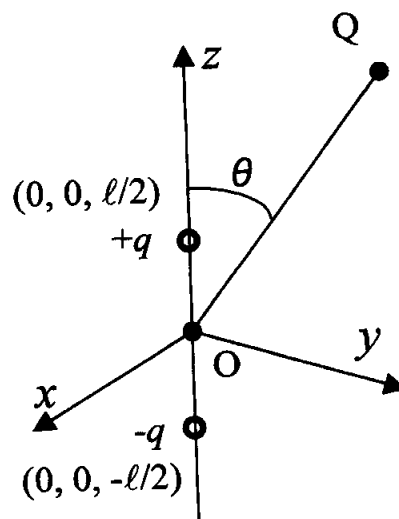


図2

3) 真空中で原点にある電気双極子モーメントがz軸に平行で、その大きさが時間的に変動している。複素数表示であらわすと

$$p_z = pe^{i\omega t}$$

で与えられる。点Tの位置を極座標表示で  $(r, \theta, \phi)$  とあらわすと、点Tでの電場および磁束密度の値は、 $r$  が十分大きくて、 $(1/r)$  に関する高次の項が無視できるとすると

$$E_\theta = \frac{-\omega^2}{4\pi\epsilon_0 rc^2} pe^{i\omega(t-\frac{r}{c})} \sin\theta \quad (\text{MKSA})$$

$$E_\theta = \frac{-\omega^2}{rc^2} pe^{i\omega(t-\frac{r}{c})} \sin\theta \quad (\text{CGS})$$

$$B_\phi = \frac{-\mu_0\omega^2}{4\pi c} pe^{i\omega(t-\frac{r}{c})} \sin\theta$$

$$B_\phi = \frac{-\omega^2}{rc^2} pe^{i\omega(t-\frac{r}{c})} \sin\theta$$

で与えられる。また、他の電場および磁束密度の成分はこれらに比べて無視できるほど小さいか、零である。上記の表式を利用しポインティング・ベクトルの大きさを求めることにより、振動する電気双極子が毎秒放射するエネルギーの時間平均を求めよ。

## 物理学 I

## 問題 2

図-A で示すような、半径  $a$  の導体棒と内半径  $b$  の円筒導体で出来ている同軸円筒がある。これら 2 つの導体間は誘電率  $\epsilon$ 、透磁率  $\mu$  の誘電体で満たされており、2 つの導体中心軸は一致している。この同軸円筒は  $z$ -軸方向に十分に長いとして以下の問いに答えよ。

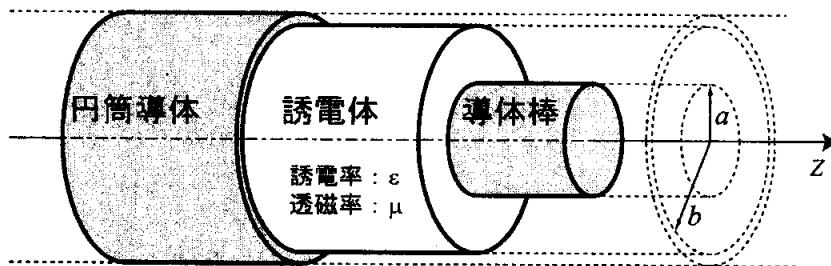


図-A

- 1) 同軸円筒の単位長さあたりの静電容量  $C$  を求めよ。
- 2) 同軸円筒の単位長さあたりの自己インダクタンス  $L$  を求めよ。
- 3) この同軸円筒と等価な回路は図-B のようになる。ただし同軸円筒の軸は  $z$ -軸方向と一致している。導体棒の軸にそった単位長さあたり電気抵抗を  $R$ 、同軸円筒の静電容量と自己インダクタンスをそれぞれ  $C$  および  $L$  として以下の問いに、 $R$ 、 $L$ 、 $C$  および  $z$  方向の微小距離  $\Delta z$  を用いて答えよ。
  - a) 軸上の場所  $z$  および時間  $t$  の関数である電流  $I(z, t)$  が導体棒を  $\Delta z$  だけ通過したときの電圧降下  $\Delta V(z, t)$  を求めよ。
  - b)  $\Delta z$  のあいだに静電容量を通して失われる電流  $\Delta I(z, t)$  を求めよ。
  - c) 上記の電流および電圧の変化から、この系の  $V(z, t)$  に対する微分方程式を導け。

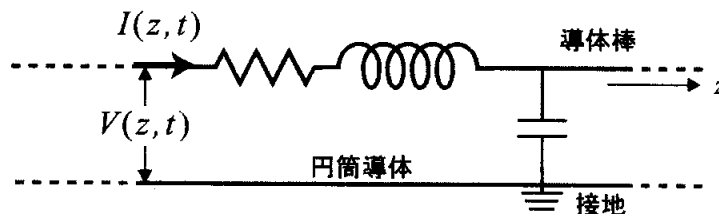


図-B

- 4) 同軸円筒に用いられている導体棒の電気抵抗を  $R = 0$  とした場合,  $V(z, t)$  に関する微分方程式は,

$$\frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial t^2} = 0,$$

また  $I(z, t)$  と  $V(z, t)$  は,

$$\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} + C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} = 0,$$

という関係がある. この同軸円筒を信号ケーブルとして用いた場合,

- a) 信号の伝播する速度, および
- b) インピーダンス  $Z_0$ ,

を求めよ.

- 5) 上記の問いのケーブルに比透磁率が  $K_m = \mu/\mu_0 = 1.0$ , 比誘電率が  $K_e = \epsilon/\epsilon_0 = 4.0$  の材料を誘電体として用い, 導体棒の半径を  $a = 1.0$  mm, 円筒導体の内半径を  $b = 2.7$  mm としたとき, このケーブルの,

- a) 信号の伝播する速度, および
- b) インピーダンス  $Z_0$ ,

を概算せよ. 必要であれば, 真空中の誘電率  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$  [F · m<sup>-1</sup>], 真空中の透磁率  $\mu_0 = 12.566 \times 10^{-7}$  [H · m<sup>-1</sup>] を使用せよ.

問題 1 と問題 2 は別々の解答用紙に解答せよ。

問題 1

1) 気体分子間に図 1 に示されるような相互作用  $U(r)$  が働く場合を考える。ただし、 $r$  は気体分子の中心間の距離、図中の  $r_0$  はおよそ分子の半径程度の大きさである。この気体の 1 モルの状態方程式が

$$pV = RT + b(T)p \quad (1)$$

と表される場合を考える。ただし、 $R$  は気体定数である。温度に依存するパラメタ  $b(T)$  は第 2 ビリアル係数と呼ばれ、相互作用の大きさに依存する。統計力学によると、 $b(T)$  は  $U(r)$  を用いて

$$b(T) = \frac{N_A}{2} \int \left[ 1 - e^{-U(r)/k_B T} \right] d^3r \quad (2)$$

と表される。ただし、 $N_A$  はアボガドロ数、 $k_B$  はボルツマン定数である。以下の問いに答えよ。

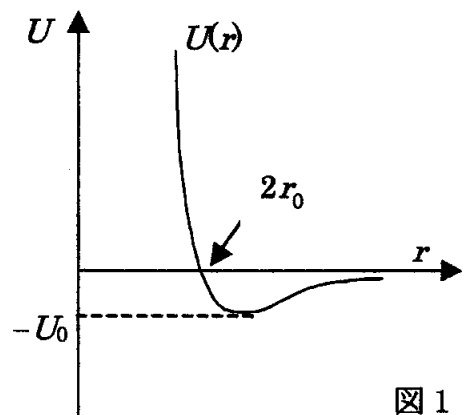


図 1

a) 高温 ( $U_0 \ll k_B T$ ) における第 2 ビリアル係数は、近似的に  $b(T) = b_0 - \frac{a_0}{T}$  と書けることを示せ (積分範囲を  $2r_0$  で分けて考察せよ)。ただし、 $a_0$  と  $b_0$  は温度に依存しない正の定数である。

b) ファン・デル・ワールス状態方程式は、 $a$  と  $b$  を正の定数として、

$$\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT \quad (3)$$

と表される。 $V$  が十分大きい場合、ファン・デル・ワールス状態方程式は状態方程式(1)で近似することができる。この場合の第 2 ビリアル係数  $b(T)$  を  $a$ 、 $b$  を用いて表せ。

c) 気体のジュールトムソン係数は

$$\mu_{JT} = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_H = \frac{1}{C_p} \left[ T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V \right] \quad (4)$$

で与えられる。ただし、 $C_p$ は定圧熱容量を表す。状態方程式(1)に従う気体のジュール・トムソン係数は、高温( $U_0 \ll k_B T$ )では負、低温( $U_0 \gg k_B T$ )では正になることを定性的に示せ。また、この気体を用いてジュール・トムソン過程を行うとき、低温では気体の温度が低下することを示せ。

2) 気体は、臨界温度  $T_{cr}$  以下の温度で圧力を増加させると液体に相転移する。圧力-温度相図上で相転移線 (2相共存線) は図2のように書ける。気相(G)及び液相(L)のギブスの自由エネルギーを  $G_G(T, p)$ ,  $G_L(T, p)$  とし、化学ポテンシャルを  $\mu_G(T, p)$ ,  $\mu_L(T, p)$  とする。以下の問いに答えよ。

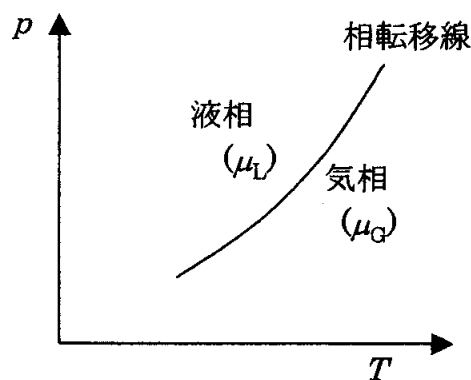


図2

a) 2相共存線は、関係式

$$\mu_G(T, p) = \mu_L(T, p) \quad (5)$$

によって決定されることを示せ。

また、温度  $T$ , 圧力  $p$  が気相領域にあるとき

$$\mu_G(T, p) < \mu_L(T, p) \quad (6)$$

が成り立つことを示せ。他方、液相では

$$\mu_G(T, p) > \mu_L(T, p) \quad (7)$$

となることを示せ。

b) 一定の圧力  $p_0$  における相転移温度を  $T_0$  とし、この圧力におけるギブスの自由エネルギー  $G_G(T, p)$  と  $G_L(T, p)$  を温度の関数として図示せよ。また、圧力  $p_0$  で液相から気相へ転移させるとき、気化熱 (潜熱)  $Q$  が必要であることを示せ。

c) この相転移が起こるとき、クラペイロン-クラウジウスの式

$$\frac{dp}{dT} = \frac{Q}{T\Delta V} \quad (8)$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $\Delta V$ は相転移に伴う体積変化である。

問題2

固体の熱的性質は、格子点での原子の振動運動に起因する。この振動運動を等方連続弾性体の弾性振動とみなす、いわゆるデバイ近似を行って固体の熱的性質を導くことができる。以下の問に答えよ。

- 1) 振動数  $\nu_i$  をもつ固有振動は、 $\frac{1}{2}h\nu_i, \frac{3}{2}h\nu_i, \frac{5}{2}h\nu_i, \dots, \left(\frac{1}{2} + n\right)h\nu_i, \dots$  と量子化される。この固有振動の状態和（分配関数）は、

$$Z_i = \frac{\exp\left(-\frac{h\nu_i}{2k_B T}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu_i}{k_B T}\right)}$$

となることを示せ。

問題を簡単にするために7)まで、図に示すような等間隔で直線上に  $N$  個の同一原子が並んだ長さ  $L$  の1次元格子を考える。



- 2) 振動数  $\nu$  と  $\nu + d\nu$  の間にある状態数は、

$$g(\nu)d\nu = \frac{6L}{c}d\nu$$

となることを示せ。縦波と横波は同じ音速  $c$  をもつとする。

- 3) デバイ近似では最大振動数  $\nu_{\max}$  が存在するとし、

$$\nu_{\max} = \frac{cN}{2L}$$

である。この物理的意味を説明し、導出せよ。

- 4) ヘルムホルツの自由エネルギーは、

$$F = \frac{6Lk_B T}{c} \int_0^{\nu_{\max}} \left\{ \frac{h\nu}{2k_B T} + \ln \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \right] \right\} d\nu$$

と書けることを示せ。



5) 内部エネルギーが、

$$U = \frac{3N h \nu_{\max}}{4} + \frac{3N k_B T^2}{\Theta_D} \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x dx}{e^x - 1}$$

と書けることを示せ。 $\Theta_D = \frac{h \nu_{\max}}{k_B}$  はデバイ温度である。

6) 高温 ( $T \gg \Theta_D$ ) における長さ一定の比熱を求めよ。

7) 低温 ( $T \ll \Theta_D$ ) における長さ一定の比熱とエントロピーを求めよ。そのときに

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

を用いよ。

以下 8) では、以上の問題を 2 次元格子と 3 次元格子の場合について考える。

8) 2 次元、3 次元の場合における低温 ( $T \ll \Theta_D$ ) の面積および体積一定の比熱が温度の何乗に比例するかを求めよ。

## 物理学 III

問題 原点に磁気単極子がある時の磁場  $\vec{B}$  は

$$\vec{B} = g_m \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (1)$$

で与えられる。ただし、 $g_m$  は磁荷を表す定数、 $\vec{r} = (x, y, z)$  は位置ベクトル、 $r = |\vec{r}|$  である。いま、質量  $m$ 、電荷  $q$  の粒子が点  $\vec{r}_0$  で、速度  $\vec{v}_0$  で入射してくる。この粒子はローレンツ力  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  を受けて運動する。その後の粒子の運動に関して以下の問いに答えよ。ただし、2個のベクトル  $\vec{A}, \vec{B}$  に関して、 $\vec{A} \cdot \vec{B}$  は内積、 $\vec{A} \times \vec{B}$  はベクトル積を表す。また、以下においてドット "  $\dot{\quad}$  " は時間  $t$  による微分を表し、 $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  である。

- (a) 運動方程式から、エネルギー保存則を示すことで、速さ  $v = |\vec{v}|$  が一定であること導け。  
(b) もし、 $\vec{r}_0$  と  $\vec{v}_0$  が平行で逆向きの時、どのような運動になるか?
- (a)  $\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = 0$  を示せ。  
(b) 原点からの距離の二乗  $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$  が、微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2} r^2 = 2v_0^2 \quad (2)$$

を満たすことを示せ。ただし、 $v_0 = |\vec{v}_0|$  である。

- (c) この微分方程式を解いて  $r^2$  を時間の関数で与えよ。さらに粒子が磁気単極子にもっとも近づいた時の  $r$  の値を求めよ。
- この系の運動を極座標系  $(r, \theta, \varphi)$  に移って考える。新しい座標系は図1のようにそれぞれの方向の単位ベクトル、 $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$  を使って表わされる。ただし、

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\ \vec{e}_\theta &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \\ \vec{e}_\varphi &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \end{aligned} \quad (3)$$

である。

- (a) 速度ベクトル  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  を、基底  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$  で展開せよ。  
(b) ローレンツ力  $\vec{F}$  が

$$\vec{F} = \frac{qg_m}{r} (-\dot{\theta} \vec{e}_\varphi + \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\theta) \quad (4)$$

で与えられることを示せ。

4. (a) この系では次のベクトル  $\vec{\Omega}$  が保存することを示せ.

$$\vec{\Omega} = qg_m \vec{e}_r - \vec{L} \quad (5)$$

ただし,  $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$  は粒子の角運動量ベクトルである.

- (b)  $\vec{\Omega}$  が  $z$  軸方向を向いている時を考え  $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$  として,  $\vec{\Omega} \cdot \vec{r}$  の満たす方程式を求めよ. これによりこの運動は, ある面内で起こっていることが分かるがそれはどのような面か?
5.  $\vec{\Omega}$  が保存するので,  $L^2 = \vec{L} \cdot \vec{L}$  が一定であることが分かるが, このことを使って  $\varphi$  の満たす微分方程式を求めよ. ただし  $\dot{\varphi} > 0$  とする.
6. 以上の結果から, 運動の様子を図を使って説明せよ.

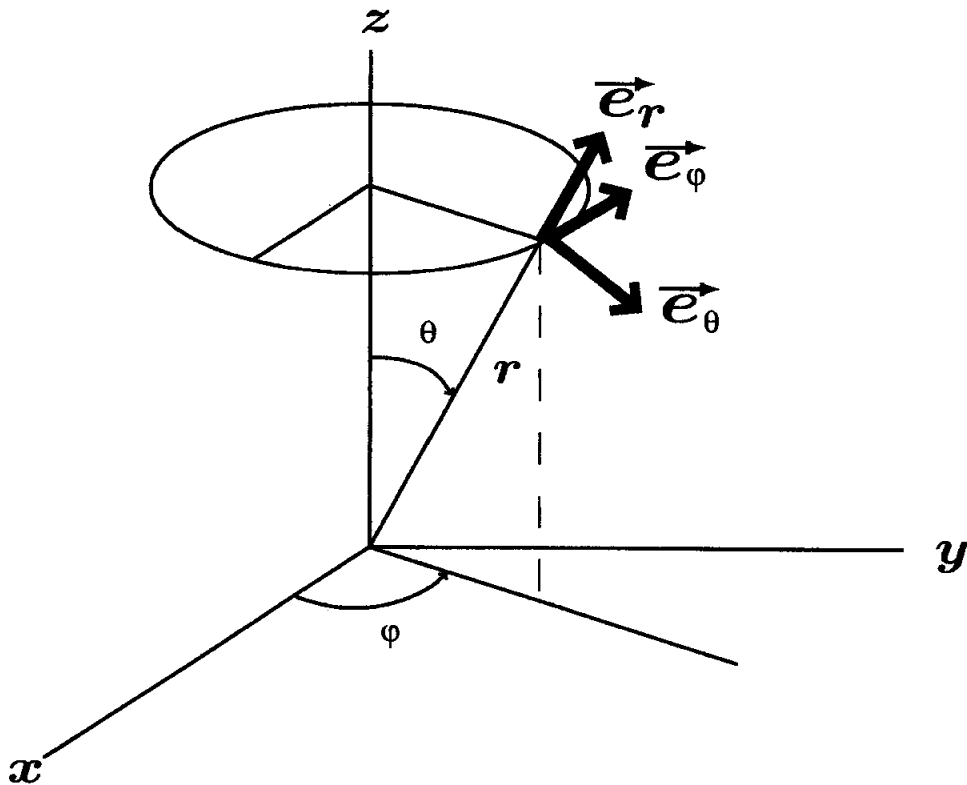


図 1

## 物理学 IV

問題 1 と問題 2 は別々の解答用紙に解答せよ。

## 問題 1

1) 1次元の井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \infty, \quad x < 0, L < x$$

$$= 0, \quad 0 \leq x \leq L$$

に束縛されている質量  $m$  の粒子を考える。

- (a) 時間に依存しないシュレーディンガー方程式を解いて、エネルギー固有値と固有関数を求めよ。(規格化する必要はない。) 縮退はあるか。
- (b) 基底状態と第  $n$  励起状態 ( $n$  は正の奇数) の波動関数の概形を図示せよ。両端以外の節の数を記すこと。
- (c) 井戸の両側のポテンシャルの高さが有限で第 1 励起状態が存在する場合、その波動関数の概形を (b) の場合との違いに注意して図示せよ。
- 2) 空間 1 次元 ( $x$  方向のみ) の場合、座標表示で運動量演算子  $p$  は  $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$  で与えられる。虚数  $i$  があるのに運動量の期待値が実数になるとすれば注目すべきである。この事に関して次の問いに答えよ。
- (a) 1 粒子波動関数  $\psi(x)$  の絶対値の二乗の  $x = -\infty$  から  $\infty$  までの積分が有限の場合、運動量の期待値は実数であることを示せ。ただし波動関数の定義域は  $-\infty < x < \infty$  とする。
- (b) 波動関数の定義域が  $0 \leq x \leq L$  の場合、運動量の期待値が実数になるための条件を求めよ。
- (c) 平面波  $e^{ikx}$  ( $k$  は実数) は全空間では規格化できない。そこで定義域を  $-L/2 \leq x \leq L/2$  として平面波を規格化し、運動量の期待値を求めよ。(  $k$  の取りうる値を決める必要はない。)

3) 3次元箱型ポテンシャル

$$V(x, y, z) = 0, \quad 0 < x < L, 0 < y < L, 0 < z < L$$

$$= \infty, \quad \text{上以外の領域}$$

に閉じ込められた質量  $m$  の粒子を考える。

- (a) 時間に依存しないシュレーディンガー方程式を解いて、エネルギー固有値と固有関数を求めよ。(規格化する必要はない。)
- (b) 基底状態と第 1 励起状態はそれぞれ何重に縮退しているか。
- (c) 考えている箱に  $N$  個の電子が入っているとする。電子間の相互作用が無視できるとすると、個々の電子は (a) の答えと同じ 1 粒子状態で記述される。ただし電子はスピンの  $\frac{1}{2}$  のフェルミ粒子である。全系の基底状態において電子が占める最高準位のエネルギー固有値はフェルミエネルギー  $E_F$  と呼ばれる。  $N$  は非常に大きいとして、  $N$  を  $E_F$  を用いて表せ。

## 物理学 IV

## 問題 2

- 1) 半径  $R$  のリング (輪) に拘束され、この上で運動する質量  $M$  の粒子を考える。回転軸を  $z$  軸とする。粒子の位置は回転角  $\theta$  だけで指定される。ラグランジアンは、角速度を  $v_\theta$  として

$$L = \frac{M}{2} v_\theta^2 \quad (1)$$

で与えられる。

- 回転角  $\theta$  に正準共役な運動量  $p_\theta$  を求めよ。
- 古典的ハミルトニアンを書き下せ。
- 量子力学的ハミルトニアンが

$$H = \frac{-\hbar^2}{2MR^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2)$$

となることを導け。

- 波動関数の一価性を要求して、エネルギー固有値と規格化された固有関数を求めよ。
- 2) 上記の問題で、リングが 2 重になっていて、粒子は 2 度の回転の後に、元の位置に戻るとする。この場合のエネルギー固有値と規格化された固有関数を求めよ。
- 3) 回転軸に平行な均一磁場  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  の中を、半径  $R$  のリング上で運動する粒子を解析する。粒子が電荷  $q$  をもつなら、量子力学的ハミルトニアン (2) は

$$H = \frac{-\hbar^2}{2MR^2} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{iq}{\hbar} A_\theta \right)^2 \quad (3)$$

と拡張される。但し、電磁気ポテンシャルは  $A_\theta = \frac{1}{2}BR$  である。

- エネルギー固有値と規格化された固有関数を求めよ。問 1) と同様にリングは一重とせよ。
- エネルギー・スペクトルを磁場  $B$  の関数として図示せよ。基底状態のエネルギー・スペクトルを太線で示せ。但し、 $q > 0$ 、 $B > 0$  とせよ。

## 物理学 V

- 物理学 V は 5 問の中から 2 問を解答する選択問題である。
- 問題 1 から問題 5 までの中から 2 問を選択して、別々の解答用紙に解答せよ。
- 問題 1、問題 2、問題 4 は、それぞれ問題紙が 2 枚になっていることに注意すること。
- 解答用紙には、選択した問題（例：物理学 V、問題 1）と受験番号を記入すること。

## 物理学 V

## 問題 1

空間 1 次元における 2 成分波動関数

$$\psi(x, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, t) \\ \psi_2(x, t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

について、次のような波動方程式を考える。

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left( \sigma_2 i \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_1 \Sigma(x) \right) \psi(x, t) \quad (2)$$

但し、 $t$  は時間、 $x$  ( $-\infty < x < \infty$ ) は空間座標を表し、

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

である。また、 $\Sigma(x)$  は、 $x$  のある関数とする。

以下の問題は、波動方程式 (2) をシュレーディンガー方程式とみなして解くこと。この場合、物理的に許されるのは、ノルム  $\int_{-\infty}^{\infty} (|\psi_1(x, t)|^2 + |\psi_2(x, t)|^2) dx$  が有限な解である。なお、以下では  $\hbar = 1$  とする単位系を用いる。

1) エネルギー  $E$  の固有状態

$$\psi(x, t) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \quad (4)$$

を考えよう。これをゼロ・モードと呼ぶ。この場合、 $\psi_1(x)$ 、 $\psi_2(x)$  がどのような微分方程式に従うか、式 (2) に代入して求めよ。

2)  $\Sigma(x) = \xi x$  の場合を考える。ただし、 $\xi$  は正の定数とする。このとき、この系には、 $E = 0$  の状態が存在する。その波動関数を求めよ。ただし、波動関数を規格化する必要はない。

3) 次に  $E \neq 0$  の状態を考えよう。前問同様  $\Sigma(x) = \xi x$  ( $\xi > 0$ ) とする。

a)  $\psi_1(x)$  を消去し、 $\psi_2(x)$  が満たすべき方程式を計算せよ。

b)  $\psi_2(x)$  に対する演算子  $a$  を

$$a \equiv \frac{d}{dx} + \xi x, \quad (5)$$

と定義し、そのエルミート共役を  $a^\dagger$  とするとき、交換関係  $[a, a^\dagger]$  を求めよ。

c) エネルギー固有値  $E$  が、どのような値をとるか答えよ。

4) 今度は、 $\Sigma(x)$  として、

$$\Sigma(x) = \begin{cases} \xi l & (x > l) \\ \xi x & (-l \leq x \leq l) \\ -\xi l & (x < -l) \end{cases} \quad (6)$$

とした場合を考える。ただし、 $l$  は正の定数である。2) の場合に比べて、ゼロ・モードの波動関数はどのように変更されるか、答えよ。



## 物理学 V

## 問題 2

周期  $a$  の一次元周期ポテンシャル中の電子の運動について考えよう。

- 1) 電子の波動関数が、周期的境界条件  $\psi_k(x+Na)=\psi_k(x)$  のもとで

$$\psi_k(x) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(ikna) \phi(x-na)$$

と表されるものとする。関係式

$$\int \phi^*(x-ma) H \phi(x-na) dx = E_0 \delta_{m,n} - V(\delta_{m,n-1} + \delta_{m,n+1}),$$

$$\int \phi^*(x-ma) \phi(x-na) dx = \delta_{m,n}$$

が成立するとき、ハミルトニアン  $H$  の期待値  $E_k$  は

$$E_k = E_0 - 2V \cos ka$$

となることを示せ。

- 2) 中心波数が  $k$  の波束状態にある電子の群速度  $v_k$  を求めよ。  
また、 $k$  を横軸にとり、 $v_k$  を図示せよ。
- 3) 一様な電場  $E$  を加えたとき電子（波束）は周期運動（ブロッホ振動）するという予測がある。波束に対する運動方程式

$$\hbar \frac{dk}{dt} = F, \quad (F \text{ は電子にはたらく力})$$

$$\frac{dx}{dt} = v_k$$

を解くことにより、この振動の周期  $T$  が  $\frac{h}{eEa}$  で与えられることを示せ。ただし、

$e$  は電荷素量であり、 $\hbar = 2\pi\hbar$  である。また、実空間における振動の振幅を求めよ。

- 4) 現実の系においては、電子はさまざまな要因により散乱を受ける。固体中の電子の散乱要因を二つあげよ。また、その散乱過程を抑制するための実験条件および、実験用試料作製に関する注意点について簡単に述べよ。
- 5) プロット振動が実験で観測されるためには、電子が散乱を受けずに運動する時間  $\tau$  が、プロット振動の周期  $T$  と比較して長いことが必要となる。典型的な  $\tau$  の値として  $1.0 \times 10^{-12}$  s、実験室で容易に実現できる電場として、 $1.0 \times 10^6$  V/m とするとき、周期ポテンシャルの周期  $a$  は、ある下限値  $a_{\min}$  より大きいことが要請される。電荷素量を  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C、プランク定数を  $h = 6.6 \times 10^{-34}$  J·s として、 $a_{\min}$  の値を計算せよ。また、この値は、典型的な半導体の1原子層厚  $1.5 \times 10^{-10}$  m の何倍に相当するか。

## 物理学 V

## 問題 3

物質に磁場をかけたとき生ずる磁化が磁場の方向を向いている場合、すなわち帯磁率が正のとき、常磁性という。負の帯磁率は反磁性とよばれる。

常磁性を示す典型的な物質としては、磁性イオンを含む絶縁体結晶がある。磁性イオンが持つ磁気双極子モーメントは、磁性イオンのスピンに由来する。この磁性体の場合、スピン間の相互作用を考慮すると、ある温度以下で磁気秩序を示すことがある。すなわち、常磁性状態となるのは転移温度以上に限られる。

代表的磁気秩序としては、強磁性と反強磁性がある。以下では、強磁性の転移温度（キュリー点）を  $T_C$  とし、反強磁性の転移温度（ネール点）を  $T_N$  とする。

以下の問いに答えよ。

- 1) 典型的な常磁性体、強磁性体、反強磁性体、の帯磁率がどのような温度変化をするか、横軸に温度  $T$  をとってそれぞれの場合について定性的に図示せよ。ただし、反強磁性体に対しては、粉末試料と単結晶の場合とを区別して記せ。また、強磁性体の場合には、転移温度  $T_C$  以上の温度領域に限定せよ。
- 2) 帯磁率を実験的に測定する場合、どのような方法があるか。2つの方法を記し、説明せよ。
- 3) 常磁性体の磁化  $M$  が温度  $T$  と磁場  $H$  の関数として、

$$M(T, H) = N\mu L(x), \quad x = \mu H/kT \quad (1)$$

と表されるとして以下の問いに答えよ。ただし、

$$L(x) = \coth x - \frac{1}{x} = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \dots \quad (2)$$

はランジュバン関数である。また、 $\mu$  は磁性イオンの磁気双極子モーメント、 $k$  はボルツマン定数、 $N$  は磁性イオンの個数である。

- (a)  $M(T, H)$  に対する具体的表式を用いて、常磁性帯磁率  $\chi$  に対するキュリーの法則を導け。
- (b) 強磁性体の場合、スピン間相互作用を分子場（ワイスの分子場）の形で導入し、帯磁率に対するキュリー・ワイスの式を導け。
- (c) ある強磁性体の場合、 $T_C = 628 \text{ K}$ 、 $\mu = 0.600\mu_B$  であった。

$$\text{ボルツマン定数} : k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\text{ボーア磁子} : \mu_B = 1.17 \times 10^{-29} \text{ J} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}$$

として、ワイス理論を用いて、0 K における分子場（=内部磁場）の値を求めよ。

問題 4

反射型の回折格子について次の問に答えよ。

回折格子で光を分光するとき、回折の式は次のように与えられる。

$$\sin \alpha - \sin \beta = m\lambda / \sigma$$

ここで、 $\alpha$  は入射角、 $\beta$  は出射角、 $m$  は回折の次数、 $\lambda$  は波長、 $\sigma$  は回折格子の溝の間隔（格子定数）である。角度は表面垂線から測り、入射角は反時計回りを正、出射角は時計回りを正とする。したがって、図 1 の場合、 $\alpha$ 、 $\beta$  ともに正となる。

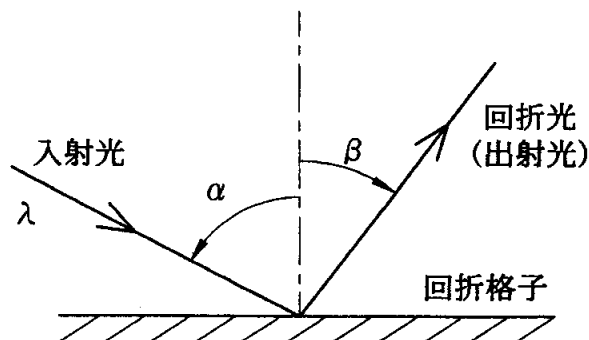


図 1

1)  $m$  は回折の次数であるが、その意味はなにか。また、 $m = 0$  はどのような場合か。

2) 回折の式を導け。

3) 格子定数  $\sigma$  の回折格子で分光できる光の波長範囲を与えよ。

4) 回折格子を用いた分光器の例として、図 2 にツェルニー・ターナー型と呼ばれる分光器における光学素子の配置を示す。主要な構成要素は入射スリット、出射スリット、平面鏡、球(凹)面鏡、回折格子である。球面鏡は、発散光を平行にする、あるいは平行光を集光する役目をする。光学素子 1, 光学素子 2, 光学素子 3 は、平面鏡、もしくは回折格子であるが、回折格子をどこに置くのがもっとも適切か、理由とともに番号で答えよ。

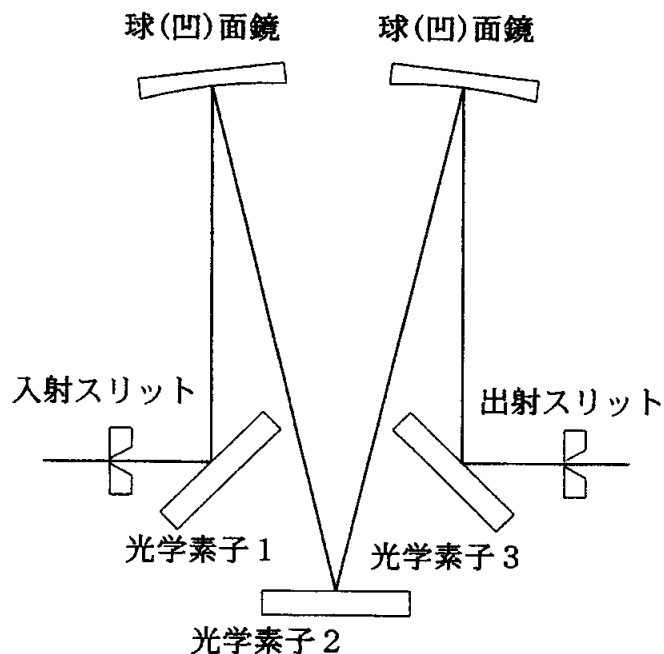


図 2

- 5) 図3に示すように、白色光（波長が連続的に分布している光）を入射したとき、出射スリットの位置で、ある場所に波長 $\lambda$ の光が到達すれば、分散方向でそれから $dx$ 離れたところには $\lambda + d\lambda$ の光が到達する。このとき $|d\lambda / dx|$ を波長分散という。回折格子から出射スリットまでの距離を $r'$ とし、ある入射角 $\alpha$ のときの波長分散を求めよ。ただし、 $dx$ にくらべ $r'$ は十分に大きいとする。また、波長分散は回折の式のみで決まるとして求めよ。

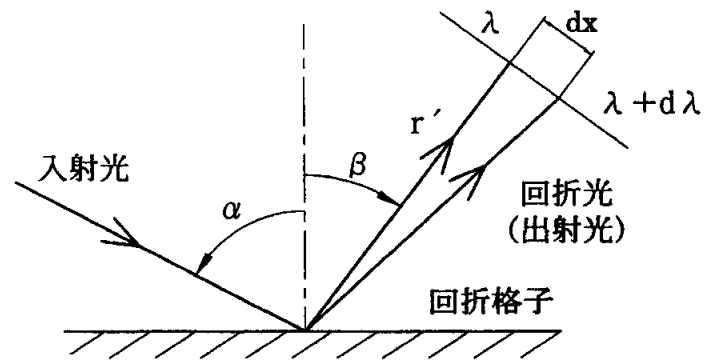


図3

- 6) ナトリウムのD線の波長は約590nmである。エネルギーで表すと何eVか。

必要な物理定数は以下の値の中から用いよ。

真空中の誘電率  $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

真空中の光速  $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

プランク定数  $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

電子の質量  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

素電荷  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

アボガドロ定数  $N_A = 6.0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

ボルツマン定数  $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

- 7) 出射スリット上での波長分散だけで分光器の分解能が決まるとする。出射スリット巾が $ds$ のとき、この出射スリットを通過する光のエネルギー分解能 $|E / \Delta E|$ を求めよ。

# 物理学 V

## 問題 5

V-5-1/1

原子核の自然崩壊には、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  の三つの崩壊モードが知られている。各々、 $\alpha$  線 ( $\alpha$  粒子 =  ${}^4\text{He}$  原子核)、 $\beta$  線 (電子) とニュートリノ、及び  $\gamma$  線 (電磁波) を放出し、より安定な状態に遷移する過程である。これらに関して、以下の間に答えよ。なお、質量  $m$ 、運動量  $p$  の粒子の全エネルギー  $E$  は、相対論的には、 $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$  で与えられる。

- (1) 崩壊は確率的に起こるため、個々の原子核が、何時崩壊するかを予測することは出来ないが、単位時間当たりに崩壊する確率を知る事ができる。ある原子核が単位時間当たり崩壊する確率を  $P$  とすると、時刻 0 で  $N_0$  個存在する原子核の  $t$  秒後の個数の期待値  $N(t)$  は、 $N(t) = N_0 \exp(-Pt)$  と表されることを示せ。  
また、原子核が崩壊するまでの時間の平均値 (平均寿命)  $\tau$  を計算し、 $\tau = 1/P$  となることを示せ。
- (2) 通常、計測されるのは残された原子核の数ではなく、放出される放射線の数 (崩壊数に比例している) である。単位時間当たりの崩壊数  $I(t)$  を時間の関数として求めよ。ただし、 $I(0) = I_0$  とする。
- (3) 寿命  $\tau$  が 2 時間程度と予想される原子核の寿命を、放出粒子数の時間変化の測定から求める。測定精度を決定すると考えられる要因を挙げ、説明せよ。
- (4)  $\alpha$  崩壊で放出される  $\alpha$  粒子を測定した。観測される  $\alpha$  粒子のエネルギーを求めよ。ただし、崩壊前の親核の質量を  $M_p$ 、崩壊後の娘核の質量を  $M_d$ 、 $\alpha$  粒子の質量を  $M_\alpha$  とする。また、 $\alpha$  粒子の速度は光速に較べて非常に遅い。
- (5)  $\beta$  崩壊の場合、放出される電子のエネルギースペクトルは、線スペクトルではなく、連続スペクトルとなる。予想される電子のエネルギースペクトルを図で示し、何故、そのようなスペクトルとなるのかを説明せよ。ただし、崩壊の前後の原子核の質量を、各々、 $M_Z, M_{Z+1}$  とし、電子の質量を  $m_e$  とする。
- (6)  $\gamma$  崩壊で放出される  $\gamma$  線を測定した。観測される  $\gamma$  線のエネルギーを、 $\gamma$  線放出による原子核の反跳をも考慮して求めよ。ただし、 $\gamma$  線は、質量  $M$  の原子核の励起エネルギー  $E_x$  の状態から基底状態への遷移で放出される。
- (7) 励起状態の寿命が有限のため、 $\gamma$  線の線スペクトルは自然幅を持ち、広がる。自然幅を持つ理由を定性的に説明せよ。また、線スペクトルの拡がりの大きさ、 $\Delta E$ 、を励起状態の平均寿命  $\tau$  で示せ。
- (8) 問 (6) で放出された  $\gamma$  線を、同じ核種の他の原子核が吸収して励起エネルギー  $E_x$  の状態となることは可能か、どうか。理由を述べて説明せよ。

## 英語

設問1-3と設問4は別々の解答用紙に解答せよ。

問題 次の英文は、昨年ノーベル化学賞を受賞された白川先生らの業績を紹介した解説記事である。これを読んで、設問1-4に答えよ。

The chemistry Nobel Prize this year went to Alan Heeger, Alan MacDiarmid, and Hideki Shirakawa "for the discovery and development of electrically conductive polymers." The laureates first described the details of their discovery in PRL<sup>1)</sup> in 1977, 23 year ago today. (下線部 1) At the time, plastics were considered nonconductors, but the team showed that adding some impurities to a polymer material could increase its conductivity by more than a billion times. Their work led to the field of plastic electronics, which has resulted in several commercial applications. But they also helped to spur new areas of fundamental research in condensed matter physics by demonstrating some exotic polymer properties, such as charge carriers that, unlike electrons, have zero spin.

Plastics are so dependable<sup>2)</sup> as insulators (materials that don't conduct electricity) that they are often used for the protective coatings around wires. By the 1970s chemists had worked with some small organic molecules that could conduct, but a conducting, carbon-based, long-chain molecule was something "no one had really contemplated<sup>3)</sup>," recalls Richard Friend of the University of Cambridge in the UK. Polymers were known to be far cheaper to process than conventional electronics materials, which is one reason the results had "a huge impact," says Friend.

Heeger, MacDiarmid, and Shirakawa, then at the University of Pennsylvania, worked with polyacetylene, which consists of a long chain of carbon atoms, each bound to two neighboring carbons and a single hydrogen atom. (下線部 2) The carbon-carbon bonds are not identical, but alternate between single and double bonds. Normally the electrons in the bonds remain localized and cannot carry an electric current, but when the team "doped"<sup>4)</sup> the material with strong electron acceptors such as iodine, the polymer began to conduct nearly as well as a metal, with a conductivity  $10^{10}$  times higher than pure polyacetylene. They confirmed that the polymer had become metallic by showing that doping caused it to absorb and reflect far infrared light, whereas the pure polymer is transparent. Photons in that range allow polyacetylene's electrons to absorb energy and enter the so-called conduction band.

Heeger recalls that, while the team was aware of possible commercial applications for the new class of conducting polymers, their research in the following years was always motivated by fundamental physics questions. For example, how does polyacetylene become a conductor? (下線部 3) Later work showed that polyacetylene and related materials behave quite differently from traditional semiconductors and conductors. For one thing, at intermediate doping levels, current is carried not by "delocalized," nearly free electrons, as in silicon or copper, but by the electrons in the carbon-carbon bonds. When a dopant<sup>4)5)</sup> removes an electron from the molecule, it can turn a double bond into a one-electron single bond, forcing a carbon atom to make single bonds with both of its

□

neighboring carbons. That charged "defect," called a polaron, can travel down the molecule as each successive carbon atom grabs<sup>6)</sup> an electron from its neighbor, trying to compensate for the change. Since single and double bonds have different lengths, the movement of charge is intimately connected with stresses and strains among the carbon atoms themselves, not just their electrons.

Polarons and other polymer chain defects called solitons turned out to have unexpected properties, such as spin in the absence of charge or charge in the absence of spin. The separation of spin and charge in one-dimensional systems remains an active area of condensed matter research today and is thought by some to be relevant to high temperature superconductors.

*From "Physics Forum"*

- 1) PRL: Physical Review Letters, a weekly journal published by American Physical Society  
C.K. Chiang, C.R. Fincher, Jr., Y.K. Park, A.J. Heeger, H. Shirakawa, E.J. Louis, S.C. Gau,  
A. G. MacDiarmid, Physical Review Letters 39 (1977) 1098-1101
- 2) dependable: able to be trusted
- 3) contemplated: to think (about) deeply and thoughtfully
- 4) dope: add impurity to (something)
- 5) dopant: impurity added to (something)
- 6) grab: to take hold of (a person or thing) with a sudden rough movement

設問 1 下線部 1 を和訳せよ。

設問 2 下線部 2 を和訳せよ。

設問 3 下線部 3 を和訳せよ。

設問 4 次の文章を英訳せよ。

- a) ドープされたポリアセチレンは、電気伝導度が連続的に 10 桁も変化する新しい伝導性高分子である。
- b) 電気抵抗測定の結果は、約 1 % のヨウ素 (iodine) をドープしたポリアセチレンが絶縁体から金属に転移していることを示している。
- c) ポリアセチレンの結晶性膜 (crystalline film) は、白川と彼の共同研究者によって開発された手法によって合成された。
- d) 白川博士がノーベル化学賞を受賞されたことは、われわれ物性物理の研究者のみならず広く日本人の誇りでもある。