

平成15年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期2年の課程入学試験

物 理 学 専 攻

筆 記 試 験 問 題

《平成14年8月27日(火)・28日(水)実施》

東北大学大学院理学研究科物理学専攻

電磁気学

問題1と問題2は別々の解答用紙に解答せよ。

問題1

1) 図1のように一様な常磁性体 1, 2 が平面を境界として接している。1と2での磁束密度をそれぞれ B_1 と B_2 、磁場を H_1 と H_2 とする。

a) 境界では以下の境界条件が成り立つことを、静磁場に関する基本法則から示せ。ただし、2つの磁性体内および界面には電流が流れていないとする。

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1t} = H_{2t}$$

ここで、下付の添え字 n および t は境界面に垂直および平行な成分を表す。

b) 磁性体 1, 2 の透磁率をそれぞれ μ_1 、 μ_2 とする。また H_1 、 H_2 が境界面の法線 n となす角をそれぞれ θ_1 、 θ_2 とすると、以下の関係が成り立つことを示せ。

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

2) 真空中に置いた円環(ドーナツ状) 磁石を、図2に示すように円環の軸を含む面で2分し、微小距離 d だけお互いに離し、空隙を作る。(図では円環磁石は円環が x - y 平面に平行になるように置かれている。断面は y - z 平面と平行である。) 磁化 M は円環に沿って一様であり、磁化ベクトル M は断面に対して垂直である。

(注: 磁化の定義は2種類あるが、この問題では磁化 M は真空の透磁率を μ_0 とすると、 $B = \mu_0 H + M$ と定義する。)

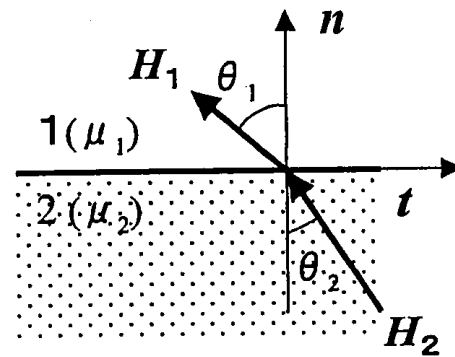


図1

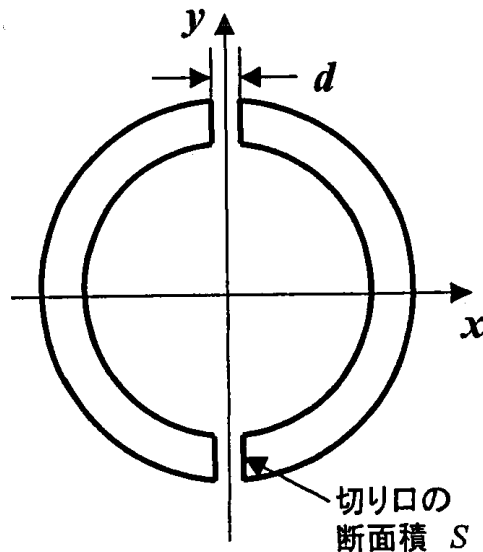


図2

- a) 空隙の磁束密度の大きさ B 、磁場の強さ H を磁化の大きさ M を用いて表せ。
 b) 円環磁石の片方の切り口の断面積を S として、2つの空隙に蓄えられるエネルギーの合計を M 、 S 、 d を用いて表せ。
 c) 2つの半円環の間に働く力の向きと大きさを求めよ。

3) 図3のようにコイルが断面を z 軸に垂直にして、2つの磁極の間に置かれている。コイルが置かれている場所の磁束密度は一様で z 軸に平行であるとする。コイルは図のように閉回路を構成し、回路の抵抗を R 、コイルの自己インダクタンスを L とする。コイルを磁極の間から動かし、磁束密度が零となる十分遠方まで移動し、停止した。この間に、回路内を Q の電荷が移動した。

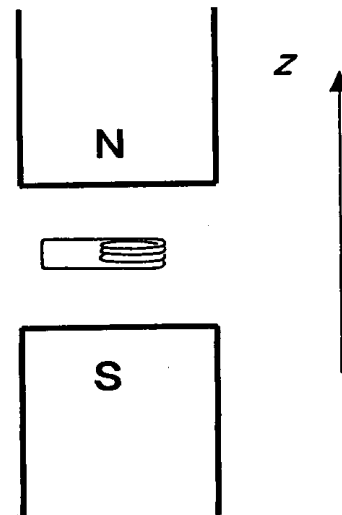


図3

a) 閉回路を貫く磁束を Φ 、また、移動の間に閉回路を流れている電流を I として、磁束 Φ の時間的变化により回路に生じる起電力、電流 I の時間的变化により自己誘導される起電力、および抵抗 R による電圧降下の間に成り立つ関係式を導け。ただし、閉回路を貫く磁束は、コイルを貫く磁束以外は無視できるとする。

b) コイルは半径が r 、単位長さあたりの巻き数が n 、長さが l のソレノイドコイルである。コイルが置かれていた場所における磁極間の磁束密度の大きさ B_0 を Q を用いて表せ。

電磁気学

問題 2

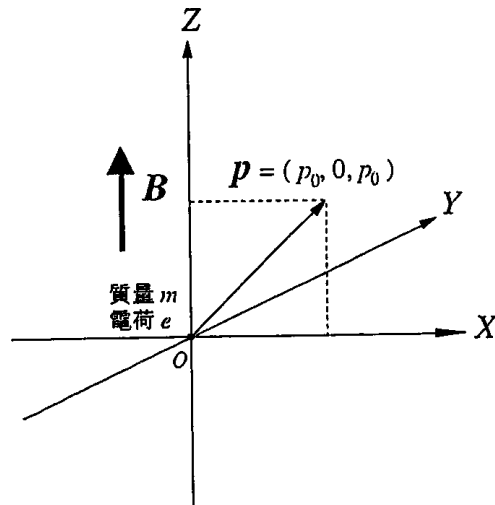
考えの筋道が分かるように説明をつけて、以下の問に答えよ。数値計算の有効数字は2桁でよい。

1) 図のように、真空中に Z 軸に平行な一様磁場 (磁束密度 B) がある。このとき、原点 O より運動量 $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = (p_0, 0, p_0)$ で正の荷電粒子 (質量 m 、電荷 e) を打ち出す。以下の問に答えよ。

a) 荷電粒子の速度 (v) が真空中の光速に比べて充分小さい場合 ($|v| \ll c$) に運動方程式を記し、 XY 平面内で円運動、 Z 方向に等速運動することを示せ。また、その XY 平面内での円運動の回転半径、角速度を求めよ。

b) 荷電粒子の速度が真空中の光速にくらべて無視できない場合を考える。 $|B| = 0.10$ [$T = N/(m \cdot A)$]、 $p_0 = 100$ [MeV/c] の時に、静止質量 $m = 100$ [MeV/c^2]、 1000 [MeV/c^2] の各粒子について、 XY 平面、 XZ 平面内の軌道を運動の方向が分かるように解答用紙上のグラフに記せ (グラフ中に目盛の単位を記入すること)。ただし、粒子が制動放射によって失うエネルギーは無視せよ。

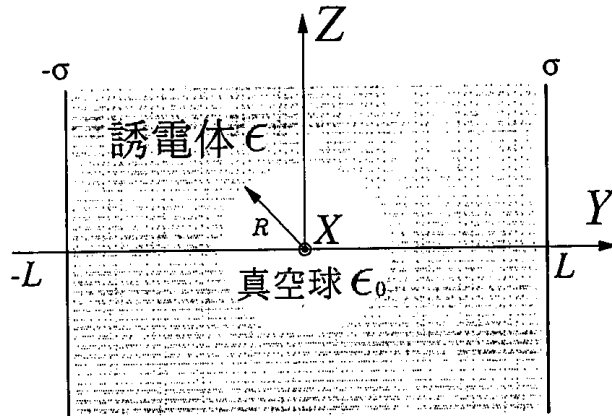
運動量の単位 [MeV/c]、質量の単位 [MeV/c^2] はそれぞれ 5.33×10^{-22} [$kg \cdot m/s$]、 1.78×10^{-30} [kg] であり素粒子等に対して便利な単位である。



必要ならば以下の数値、関係式を使用してよい。

- 真空中の光速 $c = 3.00 \times 10^8$ [m/s]
- 素電荷 $e = 1.60 \times 10^{-19}$ [C]
- 真空の誘電率 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ [$C^2/(m^2 \cdot N)$]
- 1 [eV] = 1.60×10^{-19} [J]
- 相対論的な運動方程式 $F = dp/dt$
- 相対論的な運動量 $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ 、ただし m は粒子の静止質量、 \mathbf{v} は粒子の速度、 $\gamma = 1/\sqrt{1 - (|v|/c)^2}$ である。
- ローレンツ力は相対論的な場合でも非相対論的な場合でも同じ式で与えられる。

2) XZ 平面と平行に充分大きな導体板を $Y = L, -L$ の場所に立てる。この導体板の間の空間を一様な誘電体 (誘電率 ϵ) で埋める。ただし、原点を中心とする球状の部分 (半径 $R, R \ll L$) はくり抜いて真空としておく。 $Y = L$ にある導体板を電荷面密度 σ , $Y = -L$ にある導体板を $-\sigma$ に一様に帯電させる。



a) 原点より充分離れた所で誘電体中の電場を求めよ。ただし、原点から離れた所での誘電体内の電場は Y 軸に平行な一様電場とみなすことができる。

b) 球状の真空部内における電場を求めよ。ただし、球外、球内のポテンシャルはそれぞれ、

$$\begin{aligned}\phi_{\text{外}}(r, \theta) &= -E_0 r \cos \theta + E_1 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta, \\ \phi_{\text{内}}(r, \theta) &= -E_2 r \cos \theta\end{aligned}$$

という形で記述できる。ここで、 E_0, E_1, E_2 は定数、 r は原点からの距離、 θ は Y 軸となす角度である。

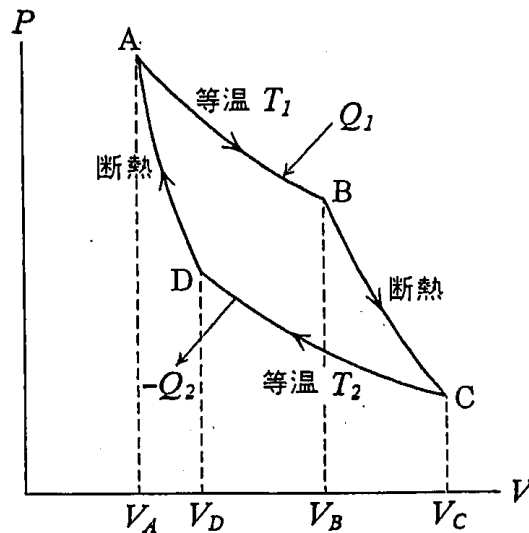
c) 1-b) と 2-b) の条件を組合せ、磁場と電場による力のつりあいを用いて質量の違う荷電粒子の分離を試みる。原点より電荷 e 、質量 $100 [\text{MeV}/c^2]$ の荷電粒子を運動量 $\mathbf{p} = (100, 0, 100) [\text{MeV}/c]$ で打ち出したときに、この粒子に磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, 0.10) [\text{T}]$ が及ぼす力と、真空球内の電場が及ぼす力がつりあい直進するように σ を決めよ。ただし、真空球外部の物質の比誘電率は $\epsilon/\epsilon_0 = 2.0$ とする。

熱・統計力学

問題 1 と問題 2 は別々の解答用紙に解答せよ。

問題 1

カルノーサイクルは熱力学の第 2 法則やエントロピーを考える際にしばしば利用される。気体を作業物質とした場合の代表的なサイクルを下に示す。



ここで、 V は気体の体積、 P はその圧力とする。A→B は等温膨張、B→C は断熱膨張、C→D は等温圧縮、D→A は断熱圧縮とする。

なお、A→B の間に高温の熱源から受け取る熱量を Q_1 ($Q_1 > 0$) とし、C→D の間に低温の熱源へ放出する熱量を $-Q_2$ ($Q_2 < 0$) とする。

1) 一般に図のように書けるのは等温変化と断熱変化における $P - V$ 変化の傾斜が異なるからである。気体は 1 モルの理想気体として、以下の問に答えよ。

a) 温度を T と指定した場合について、等温変化における P と V との関係式を記せ。

b) 気体に対する無限小の準静的過程の際に、気体が受け取った熱 δQ に対する熱力学第 1 法則を記し、式の物理的意味を簡単に記せ。なお、この無限小過程における内部エネルギーの増加を dU とし、体積の増加を dV とする。

c) 気体の定積モル比熱 C_V と定圧モル比熱 C_P との間に Mayer の関係式

$$C_P = C_V + R \quad (R \text{ は気体定数}) \quad (1)$$

が成り立つことを示せ。なお、理想気体の内部エネルギー U は体積 V によらないから $dU = C_V dT$ とおける。

d) C_V が温度によらない場合、準静的断熱過程において、 $TV^{\gamma-1} = \text{一定}$ 、および $PV^{\gamma} = \text{一定}$ 、なる関係が成り立つことを示せ。なお、 $\gamma = C_P/C_V (> 1)$ である。

e) 理想気体の場合には、等温過程で系が外部から受け取る熱量 Q と、そのときに外部に為す仕事 W は等しい。このことを用いて、 Q_1 と Q_2 を計算し、

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (2)$$

となることを示せ。なお、 C_V は温度によらないとする。

2) 理想気体の熱力学に関する以下の問に答えよ。

a) 熱力学によると、エントロピーと呼ばれる状態量 S が存在し、 $dS = \delta Q/T$ が成り立つ。 C_V が温度によらないとして、1モルの理想気体のエントロピー $S = S(T, V)$ を求めよ。

b) 無限小の状態変化の際に、 dU , dS , dV の間に成り立つ熱力学関係式を記せ。

c) S は状態量であるから、カルノーサイクルに沿って一周積分すると、 $\oint dS = 0$ が成り立つ。このことを用いて、式(2)の関係式を説明せよ。

d) 理想気体1モルを 20°C で 1.0 気圧 (0.10 MPa) から 1.0×10^2 気圧 (1.0×10 MPa) まで等温圧縮するときのエントロピーの変化量を計算せよ。ただし、 $\log e = 0.434$ 、 $R = 8.3 \text{ J K}^{-1}$ とする。

熱・統計力学

問題 2

量子力学では、一つの量子状態 $l (= 0, 1, 2, \dots)$ を占有できる粒子数 n_l が $n_l = 0, 1$ に限られるフェルミ粒子と、 $n_l = 0, 1, \dots, \infty$ と無限個まで許されるボーズ粒子とが存在する。以下、量子状態 l における粒子のエネルギーを ε_l 、 $\beta = 1/(k_B T)$ (T は温度、 k_B はボルツマン定数)、化学ポテンシャルを μ と記す。またこれらの粒子系は、 $\beta(\varepsilon_l - \mu) \gg 1$ の極限でボルツマン統計に従うことが知られている。

1) フェルミ粒子系について以下の問いに答えよ。

a) 大正準集合 (グランド・カノニカル集合) の状態和

$$Z_G = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_l\}=0,1} e^{-\beta(E-\mu N)} \quad (1)$$

を求めよ。ここで $N = n_0 + n_1 + n_2 + \dots$ 、 $E = \varepsilon_0 n_0 + \varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2 + \dots$ 、また $\sum_{\{n_l\}=0,1}$ は N を一定とした時の各 n_l に関する和である。

b) n_l の平均値 $\langle n_l \rangle$ 、並びに n_l^2 の平均値 $\langle n_l^2 \rangle$ を求め、 $\langle n_l^2 \rangle = \langle n_l \rangle$ となることを示せ。

c) n_l の揺らぎの二乗 $(\Delta n_l)^2 = \langle n_l^2 \rangle - \langle n_l \rangle^2$ とその上限を求めよ。

d) $\langle n_l \rangle$ を ε_l の関数と見なしたものを粒子数密度分布関数と呼び $f(\varepsilon_l)$ で表す。これと系の状態密度 $\rho(\varepsilon)$ を用いて全粒子数の平均値 $\langle N \rangle$ は

$$\langle N \rangle = \int_0^{\infty} \rho(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (2)$$

で与えられる。これを用いて

$$T \left(\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu} \right)_{T,V} \quad (3)$$

を計算し、これと c) で求めた $(\Delta n_l)^2$ との関係について述べよ。

e) c) の結果を用いて $\beta(\varepsilon_l - \mu) \gg 1$ の極限における $(\Delta n_l)^2$ を求めよ。c) で求めた $(\Delta n_l)^2$ と、この極限における $(\Delta n_l)^2$ を $\langle n_l \rangle$ の関数として図示し、両者の特徴と相違について簡単に説明せよ。

2) ボーズ粒子とフェルミ粒子の中間の性質を持つ粒子として、 $n_i = 0, 1, 2$ の粒子数が許される仮想的な粒子を考えることができる。相互作用の無視できるこの粒子系について以下の問いに答えよ。

a) $\langle n_i \rangle$ 並びに $\langle n_i^2 \rangle$ は以下の式で与えられることを示せ。

$$\langle n_i \rangle = \frac{2 + e^{\beta(\epsilon_i - \mu)}}{1 + e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + e^{2\beta(\epsilon_i - \mu)}} \quad (4)$$

$$\langle n_i^2 \rangle = \frac{4 + e^{\beta(\epsilon_i - \mu)}}{1 + e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + e^{2\beta(\epsilon_i - \mu)}} \quad (5)$$

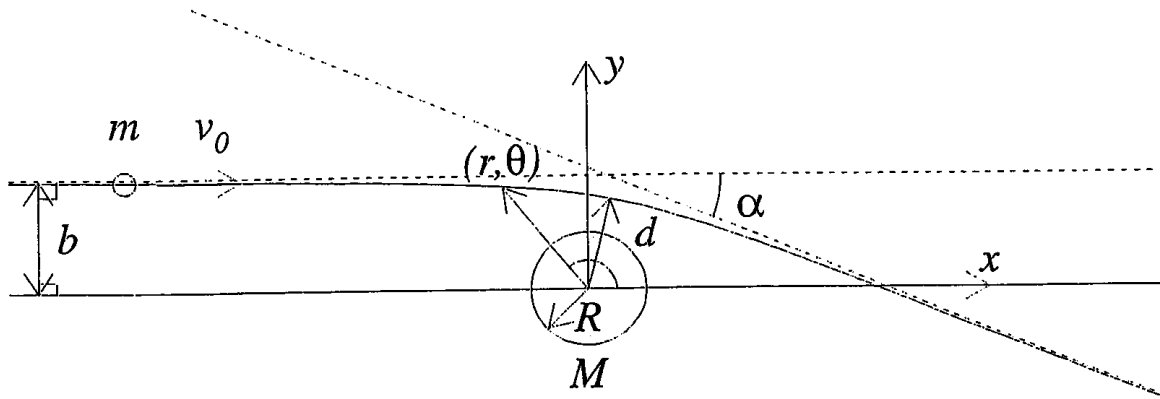
b) $\langle n_i \rangle = 1$ の場合に $(\Delta n_i)^2$ を求め、フェルミ粒子系、ボルツマン統計に従う粒子系の結果とその大小を比較せよ。またこれらの結果とボーズ粒子系における $(\Delta n_i)^2$ との大小関係について推測し、その理由について簡単に述べよ。

力学

問題

無限遠で、速度 v_0 で等速運動をしていた質量 m の隕石が、質量 M 、半径 R の惑星近傍を通過する。図のように衝突パラメータ b 、最近接距離 d 、無限遠での散乱角 α を定義する。隕石の軌道は、惑星中心を原点とした極座標 (r, θ) で表す。次の問に答えよ。

ただし、隕石は質点とみなし、質量は惑星の質量に比べ十分小さい ($m \ll M$)。近傍の恒星や惑星の重力は無視でき、惑星に大気はない。



- 1) 系のラグランジュ関数を、 $r, \theta, \dot{r} (\equiv dr/dt), \dot{\theta} (\equiv d\theta/dt), m, M, G$ (重力定数)の中から必要なものを用いて表せ。
- 2) 運動方程式、角運動量保存則、エネルギー保存則を式で示せ。
- 3) 散乱角 α は衝突パラメータ b により変化する。 α を b の関数として求めよ。

初期条件 ($t \rightarrow -\infty$) は、 $\lim_{t \rightarrow -\infty} r = \infty, \lim_{t \rightarrow -\infty} \theta = -\pi, \lim_{t \rightarrow -\infty} r \sin \theta = b$ である。

- 4) 最近接距離 d は衝突パラメータ b により変化する。 d を b の関数として求めよ。
- 5) 最近接距離 d における速度 v を求めよ。
- 6) 隕石が惑星の表面をかすめた時 ($d=R$)、隕石に、進行方向の反対向きに摩擦力 F が作用し、隕石が惑星の重力圏から離脱できなくなった。摩擦力 F による力積の最小値を求めよ。

量子力学

問題1と問題2は別々の回答用紙に解答せよ。

問題1

質量 m の粒子の一次元ポテンシャル問題に関する以下の問に答えよ。粒子は、運動エネルギー E で、座標 $x = -\infty$ から $x = \infty$ に向かって飛んでくるものとする。

- 1) 最初に、位置エネルギー $V(x)$ が次式で与えられる場合を考える (図1参照)。

$$V(x) = 0 \quad (-\infty < x < 0), \quad V(x) = -V_0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (1)$$

ただし、 $V_0 \geq 0$ とする。

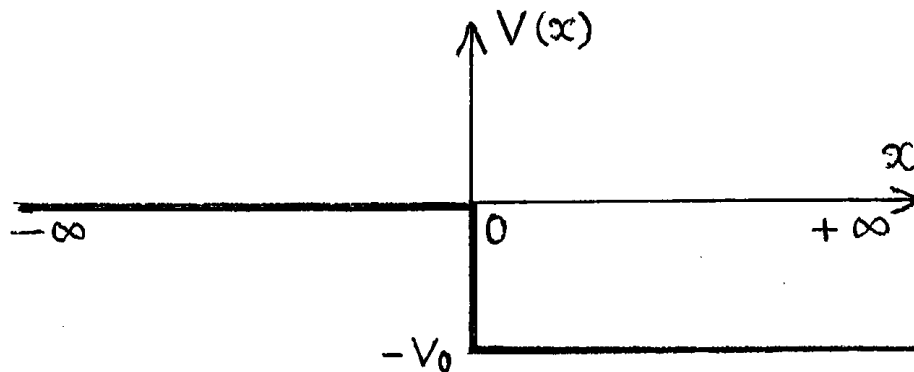


図1

- a) $x < 0$ および $x > 0$ の領域をそれぞれ領域 I, II と呼ぶことにする。定常状態においてそれぞれの領域の波動関数を $\psi_I(x)$, $\psi_{II}(x)$ と表すとき、それらが従うシュレーディンガー方程式を書き、それらが、一般的に、

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad \psi_{II}(x) = Ce^{iKx} + De^{-iKx} \quad (2)$$

の様に表せることを論ぜよ。但し、 A, B, C, D, k, K は x によらない定数。また、 k および K を m, E およびプランク定数を用いて表せ。ただし、 $k > 0, K > 0$ とする。そのとき、 D が 0 である理由を述べよ。

- b) B/A および C/A を、 k と K を用いて表せ。
- c) 領域 I における入射波および反射波の流れの密度 (確率の流れの密度) を、それぞれ、 j_i, j_r 、領域 II における透過波の流れの密度 (確率の流れの密度) を j_t とするとき、 j_i, j_r, j_t を A, B, C, m, k, K およびプランク定数を用いて表せ。
- d) 反射確率 R および透過確率 T を、 A, B, C, m, k, K およびプランク定数のうち必要なものを用いて表せ。
- e) V_0 の値を固定したとき、 R を E の関数として図示せよ。その際、 E の値が 0 の近傍および無限大に近づく漸近領域での R の振る舞い (近似的関数形) を論じること。

- 2) 次に、 $x = a$ (ただし、 $a > 0$) の位置に壁を設け、 $x > a$ の領域の位置エネルギーを無限大にした場合を考える (図2参照)。この時の波動関数の振るまいを検討し、特に、 $Ka = 2\pi(2 + \frac{1}{8})$ の場合について、全 x 領域 ($-\infty < x < \infty$) に渡って図示せよ。作図に当たっては、縦軸および横軸にそれぞれ波動関数の値および x の値をとり、特徴に配慮して丁寧に描くこと。また、グラフを特徴付ける重要な座標の値を明記すること。作図に当たっての波動関数の検討は、シュレーディンガー方程式を厳密に解くかわりに物理的考察に基づいて行ってもよい。その場合は、物理的考察について詳しく述べること。一方、シュレーディンガー方程式を解いて答える場合は、作図に当たって留意した事項を簡条書きすること。

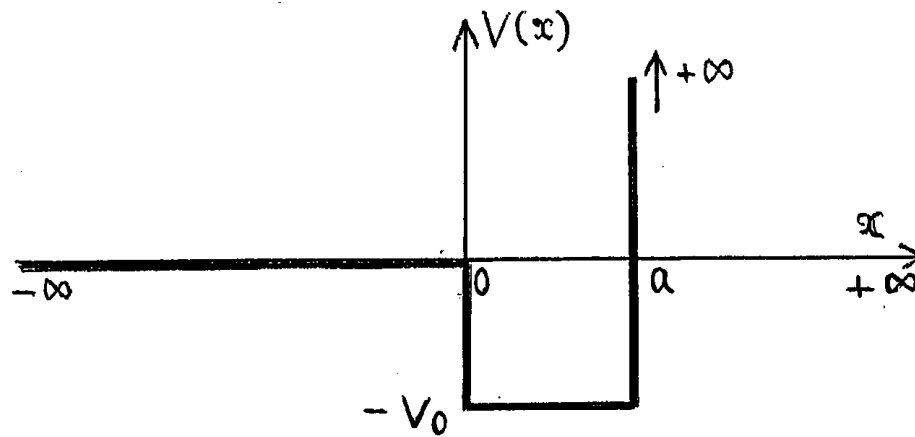


図 2

量子力学

問題2

1) 3次元球対称なクーロンポテンシャル $V(r) = -e^2/r$ に束縛されている質量 m の電子を考える。ここで、 e は電気素量である。

この系の波動関数の空間部分は、極座標 (r, θ, φ) を用いて、変数分離できることが知られている。動径方向の波動関数 $R_{nl}(r)$ は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - \frac{e^2}{r} \right] R_{nl}(r) = E_n R_{nl}(r) \quad (1)$$

なるエネルギー固有値方程式を満たす。ただし、 n は主量子数、 l は方位量子数を表し、 E_n は主量子数が n のときのエネルギー固有値である。

以下の問いに答えよ。必要であれば、ボーア半径 $a_0 = \hbar^2/e^2m$ を用いてよい。

a) 波動関数 $R_{nl}(r)$ が原点付近 ($r \sim 0$) で

$$R_{nl}(r) = c_0 r^\alpha + c_1 r^{\alpha+1} \dots \quad (2)$$

のように振舞うとする。これを (1) に代入し、 r の最低次の項を調べることで、 $\alpha = l$ であることを示せ。(したがって原点付近では R_{nl} は r^l に比例する。)

b) 基底状態 ($n = 1$) では $l = 0$ である。波動関数の原点付近と無限遠方での振舞いに注意しながら、 E_1 と波動関数 R_{10} を求めよ。ただし、波動関数は

$$\int_0^\infty dr r^2 |R_{nl}(r)|^2 = 1 \quad (3)$$

の様に規格化されている。

c) この波動関数 R_{10} の振舞いを r の関数として図示せよ。

d) 次に主量子数が $n = 2$ の状態を考える。この時、方位量子数 l は $l = 1, 0$ の値をとる。波動関数 R_{20} と R_{21} の振舞いを図示せよ。 R_{10} の振舞いとの違いに注意して書くこと。波動関数を厳密に求める必要はないが、作図にあたって留意した点を簡条書きで述べよ。

2) (1) 式は、電子の速度が小さい極限（非相対論的極限）で成り立つシュレーディンガー方程式である。実際には、様々な相対論的な補正を考えなければならない。そのうち、ここでは、

$$H_D + H_{SO} = \frac{\pi \hbar^2 e^2}{2m^2 c^2} \delta^{(3)}(\vec{r}) + \frac{1}{2m^2 c^2} \frac{e^2}{r^3} \vec{s} \cdot \vec{l} \quad (4)$$

で与えられる補正を摂動論で考えよう。ただし、 c は光速、 \vec{s} は電子のスピン演算子、 \vec{l} は軌道角運動量演算子である。また、 $\delta^{(3)}(\vec{r})$ は3次元のデルタ関数で、関数 $f(\vec{r})$ に対し

$$\int d^3 \vec{r} f(\vec{r}) \delta^{(3)}(\vec{r}) = f(0) \quad (5)$$

で特徴づけられる。(4) 式の第1項はダーウィン (Darwin) 項と呼ばれ、第2項は、スピン・軌道相互作用を表す。

以下の問いに答えよ。

a) l が与えられた時、 $\vec{s} \cdot \vec{l}$ の期待値はどのような値を取り得るか。次の恒等式

$$\vec{s} \cdot \vec{l} = \frac{1}{2} [(\vec{s} + \vec{l})^2 - \vec{s}^2 - \vec{l}^2] \quad (6)$$

を使って答えよ。

b) この補正 (4) により、エネルギー準位はどのようにずれるか。 $l=0$ の場合と $l \neq 0$ の場合に分けて論ぜよ。定性的な議論で十分で、ずれを定量的に計算する必要はない。

物理学一般

- ◎ 物理学一般は5問の中から、2問を解答する選択問題です。
- ◎ 問題番号1から問題番号5までの中から、2問を選択して別々の解答用紙に解答しなさい。
- ◎ 解答用紙には受験番号を記入し、選択した問題番号を○で囲むこと。

物理学一般

問題 1

中心力によって束縛された粒子の量子状態を考える。シュレーディンガー方程式に従う粒子の波動関数の空間部分は、極座標 (r, θ, ϕ) をとると $\psi_{nlm} = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ のように変数分離できる。ここで、 n は主量子数、 l は方位量子数、 m は磁気量子数である。 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ は、角運動量演算子を $\vec{L} = \hbar \vec{\ell} = \hbar(l_x, l_y, l_z)$ (\hbar はプランク定数) とするとき、 $\vec{\ell}^2$ の固有関数で、固有値方程式は固有値を λ と書くと

$$\vec{\ell}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) = \lambda Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1)$$

で与えられる。ただし、 $\vec{\ell}^2 = \ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2 = \ell_- \ell_+ + \ell_z^2 + \ell_z$ であり、極座標ではそれぞれ

$$\begin{aligned} \ell_{\pm} &= \ell_x \pm i\ell_y = e^{\pm i\phi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ \ell_z &= -i \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (2)$$

と書ける。以下の問 1) - 6) について答えよ。

- 1) 交換関係 $[\ell_z, \ell_{\pm}] = \pm \ell_{\pm}$ と $[\vec{\ell}^2, \ell_z] = 0$ が成り立つことを示せ。
- 2) Y_{lm} は ℓ_z の固有関数でもあり、 $\ell_z Y_{lm} = m Y_{lm}$ を満たす。このとき、固有値 m は整数になる。その理由を述べよ。
- 3) $\ell_{\pm} Y_{lm}$ も ℓ_z の固有関数であることを示し、その固有値を求めよ。
- 4) $\vec{\ell}^2$ の固有値 λ が定まると ℓ_z の固有値には上限と下限があることが示せる。その上限を l としたとき、 λ の値を求めよ。
- 5) ある方向の単位ベクトルを $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ とする。粒子が固有関数 ψ_{nlm} で与えられる固有状態にあるとき、 \vec{u} 方向の角運動量 $(\vec{L} \cdot \vec{u})$ の期待値を求めよ。ただし、 $(\vec{L} \cdot \vec{u})$ はベクトル \vec{L} と \vec{u} の内積である。
- 6) 光を入射した時に生じる電気双極子遷移の振幅は、粒子の電荷を e とすると、双極子モーメント演算子 $e(\vec{r} \cdot \vec{A})$ の行列要素

$$\langle l'm' | e(\vec{\epsilon} \cdot \vec{r}) | lm \rangle = e \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) (\vec{\epsilon} \cdot \vec{r}) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3)$$

に比例する。ここで、 $\vec{\epsilon}$ は偏極ベクトル、 \vec{r} は位置ベクトルである。このことから、電気双極子遷移に関する選択則を次の設問にそって求めよ。

- a) 磁気量子数に関する選択則は、偏極の方向によって異なる。偏極が z 方向 ($\vec{\epsilon} = (0, 0, 1)$) の場合と、円偏極 ($\vec{\epsilon} = (1, \pm i, 0)$) の場合に分け、電気双極子遷移が起こるためには m と m' の間にどのような関係がないといけないか議論せよ。
- b) Y_{lm} は空間反転 $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ を行うと $Y_{lm}(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \phi)$ のように変換する。このことを用いて、 $l' = l$ の遷移は起こらないことを示せ。
- c) 始状態の方位量子数 l が与えられている場合、電気双極子遷移が起りうる終状態の l' の値を、角運動量の合成則を使ってすべて求めよ。

物理学一般

問題 2

同種の原子 N 個から成る円環 (ring) 状の分子の電子状態を考える。多電子系としての分子の個別の電子の状態を表す波動関数 (= 分子軌道) に対して強結合近似を用いた場合、波動関数は原子軌道の線形結合として表される。特に、各原子から同種の原子軌道が 1 個ずつ関与するとした場合の波動関数は次式で表される：

$$\psi = \sum_{n=1}^N c_n |n\rangle \quad (1)$$

ただし、Dirac のケット $|n\rangle$ は n 番目の原子の原子軌道を表し、 c_n は対応する確率振幅を表す。議論を簡単にするために、原子軌道全体は正規直交系をなすものと仮定する： $\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}$ 。また、上記波動関数に作用するハミルトニアンは次式で与えられるものとする：

$$\mathcal{H} = - \sum_{n=1}^N t (|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|) \quad (2)$$

ただし、 $|N+1\rangle \equiv |1\rangle$ とする。また、パラメタ $t (> 0)$ は関係する 2 個の原子間の移行積分 (transfer integral) を表す。

1) 上記ハミルトニアンは N 次元エルミート行列の Dirac 表示 (ブラケット表示) に他ならない。 $N = 3$ の場合に、対応する行列を具体的に表すと次のようになる：

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & -t & -t \\ -t & 0 & -t \\ -t & -t & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

この場合、波動関数 ψ は 3 成分列ベクトルとなる。

- 上記のハミルトニアンは 3 個の固有値 E_0, E_1, E_2 を持つが、そのうち 2 個 (E_1, E_2 とする) は縮退している。縮退していない固有値 E_0 は基底準位 (基底状態のエネルギー) を表す。 E_0 と E_1 を具体的に求めよ。
- 基底状態の波動関数 ψ_0 (または対応する固有ベクトル) を求めよ。ただし、波動関数は規格化すること。
- 励起状態の波動関数 ψ_1, ψ_2 を求めよ。ただし、3 個の波動関数 ψ_0, ψ_1, ψ_2 が正規直交系をなすように ψ_1, ψ_2 を選ぶこと。

2) 次に、一般の N の場合について考察する。ハミルトニアン (2) に関連して、系の波動関数に作用する演算子として次の演算子を導入する：

$$T = \sum_{n=1}^N |n+1\rangle\langle n| \quad (4)$$

この演算子は円環状の分子を中心の周りで1原子分回転させる作用を表す。従って、この演算子はハミルトニアン \mathcal{H} と可換となる。また、演算子方程式 $T^N = 1$ を満たす。

T はユニタリ演算子であるから、その固有値は絶対値が1の複素数となる。 T の固有値

$$\alpha = \exp(-ik), \quad -\pi < k \leq \pi \quad (5)$$

に対応する固有関数 (固有状態) を $|k\rangle$ とした場合、定義により、次式が成り立つ：

$$T|k\rangle = \alpha|k\rangle \quad (6)$$

また、固有関数 $|k\rangle$ に対して、原子軌道 $|n\rangle$ 上の確率振幅 $c_n(k)$ は次式で定義される：

$$|k\rangle = \sum_{n=1}^N c_n(k)|n\rangle \quad (7)$$

- a) $T|n\rangle$ および $\langle n|T$ を計算せよ。
- b) $T^\dagger|k\rangle = \alpha^*|k\rangle$ が成り立つことを示せ。ただし、 T^\dagger は T のエルミート共役を表し、 $\alpha^* = \exp(ik)$ は α の複素共役を表す。
- c) 式 (6) を用いて確率振幅 $c_n(k)$ が満たすべき方程式を導け。
- d) $\alpha = \exp(-ik)$ が T の固有値となるための条件式を導き、その結果を用いて T のすべての固有値を求めよ。
- e) 固有関数 $|k\rangle$ を求めよ。ただし、固有関数は規格化せよ。
- f) ハミルトニアン \mathcal{H} は演算子 T を用いると、 $\mathcal{H} = -t(T + T^\dagger)$ と表すことができる。この結果を用いて \mathcal{H} のすべての固有値を求めよ。

物理学一般

問題 3

結晶成長、および結晶構造に関する以下の問いに答えよ。

- 1) 結晶成長の初期過程のモデルとして、過飽和水蒸気（その温度における飽和蒸気圧よりも高い圧力の水蒸気）中の、小さな液滴の生成を考える。ただし、考えている系は、常にほぼ水蒸気で占められており、等温、等圧と近似してよいものとする。
- a) 取り扱いを簡単にするため、液滴は半径 r の球形をしているとする。水一分子あたりの体積が V であるとき、この液滴中の分子数を n 、 V を用いて表せ。
- b) 半径 r の液滴の形成による系の自由エネルギー変化 $\Delta G(r)$ は、液滴の体積に比例する減少項と、液滴の表面積に比例する増加項(表面エネルギー)の和として表すことができる。前者の寄与として、水一分子あたりのエネルギー変化を $-\Delta\mu$ ($\Delta\mu > 0$)、後者の寄与として、単位面積あたりの表面エネルギーを σ とするとき、 $\Delta G(r)$ を、 r 、 V 、 $\Delta\mu$ および σ を用いて表せ。ここで、 $\Delta\mu$ 、 σ は、 r に依存しない定数として考えてよい。
- c) b) で求めた $\Delta G(r)$ を、横軸を r として図示せよ。ここで、 $\Delta G(r)$ が、ある臨界半径で最大値をとることに注意し、この臨界半径、および $\Delta G(r)$ の最大値を r_c 、 ΔG_c 、 σ を用いて図中に示せ。
- d) 半径 r の小さな液滴が水蒸気中に形成された場合、液滴の大きさは、その後どのように変化すると予想されるか。半径 r が、臨界半径よりも小さい場合と、大きい場合にわけて説明せよ。
- 2) 上記のモデルにおいては、球形をした水滴を取り扱ったが、食塩の粒の形などを思い浮かべてみるとわかるように、現実の結晶の形状は、一般的には、球形ではない。この要因の一つである結晶構造の異方性について、単純立方格子を例にとり考えてみよう。
- a) 図 1 に、単一元素からなり、単純立方格子の格子点に原子一個が配置されている結晶（格子定数を a とする）の(100)面と、その原子配列を示す。同様に、同じ結晶の(110)面および(111)面を単位格子中に斜線を用いて図示せよ。また、それぞれの面の原子配列を、図 1 と同様に代表的な長さを書き入れて図示せよ。

- b) 単純立方格子の(100)面は、格子定数を a とすると、面積 a^2 あたり一つの格子点が存在する。図2に示すように、結晶を分割して二つの{100}面をつくるために必要なエネルギーの面密度は、一つの格子点に対して、最近接原子との結合を一つ切る必要があるので、最近接原子間の結合エネルギーを γ とすると、 γ/a^2 となる。同様に、単純立方格子結晶を分割して二つの{110}面および{111}面を得るのに必要なエネルギーの面密度を求めよ。

なお、{100}面など、{ } を用いた表記は、(100)面と($\bar{1}00$)面など、対称性により等価な面を示している。

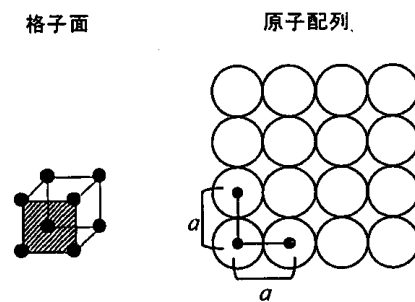


図1 単純立方格子の(100)面（斜線部）および原子配列

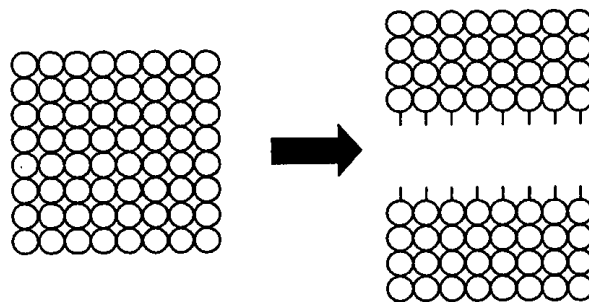


図2 結晶を分割して形成される二つの{100}表面

物理学一般

問題 4

比熱は重要な物理量であるとともに、その測定には低温、真空等の物性実験の基礎知識が必要である。図-1 に断熱法による低温比熱測定用の容器の概略を示す。この容器を使った比熱測定では、外部との熱の出入りを遮断して試料及び試料台に熱を与え、その際の温度変化を測定することにより比熱を求める。図の容器では、抵抗温度計とヒーターを取り付けた試料台に試料を密着させてあり、試料台はナイロン糸によりAから吊り下げられている。A は試料及び試料台を取り囲んでいる。

以下の比熱に関連する問に答えよ。

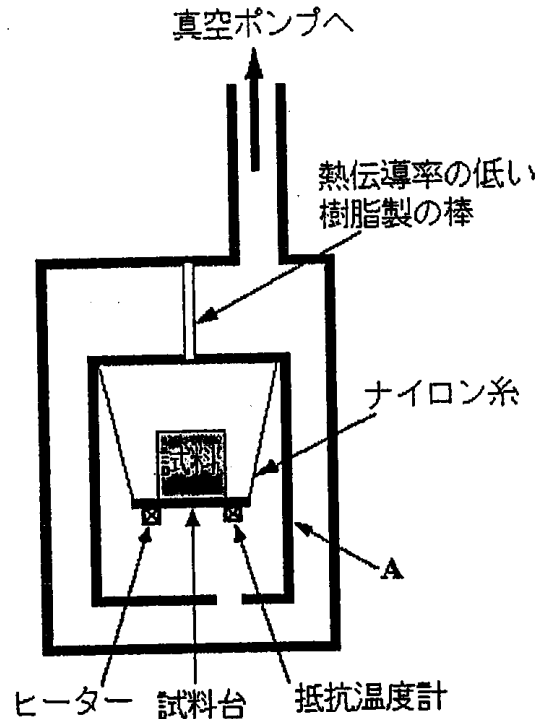


図-1 断熱法による比熱測定用容器

- 1) 抵抗温度計とは物質の抵抗が温度変化することを利用して、抵抗値を測定して温度を決める温度計である。比熱測定では精密な温度計測が必要である。4.2K 以下の低温での測定では、金属を使用した抵抗温度計ではなく半導体を使用した抵抗温度計が用いられることが多いが、その理由を金属と半導体の抵抗の温度変化のそれぞれの特徴を比較して述べよ。
- 2) 空気を媒介とした熱の出入りを遮断するために、図-1 の容器内を真空排気する必要がある。真空排気による容器内の圧力変化を以下の式で考える。

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\frac{S_0}{V} \{p(t) - p_0\} \quad (1)$$

(1) 式で、 t は時間、 $p(t)$ は容器内の圧力、 V は容器の容積、 S_0 及び p_0 はそれぞれ使用した真空ポンプの入り口での排気速度と到達圧力である。ここで、 $V = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ 、 $S_0 = 1.0 \times 10^{-1} \text{ m}^3/\text{sec}$ 、 $p_0 = 1.0 \times 10^{-5} \text{ Pa}$ 、 $p(t=0) = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ としたとき、容器内の圧力が $2.0 \times 10^{-5} \text{ Pa}$ になる時間 t を、小数点以下を切り上げた秒単位で求めよ。なお、 $e^{-10} = 4.5 \times 10^{-5}$ として計算に用いてよい。

- 3) 前問で得られた排気時間は、実際の系での排気時間と比較すると非常に短い。この理由として考えられる事を二つあげよ。
- 4) 断熱法による比熱測定では、測定物と外部を熱的に遮断することが重要である。図-1 の容器では、試料台を支えるために熱の出入りの無視できるナイロン糸を使用し、容器内を高真空にすることにより空気を媒介とした熱の出入りも遮断している。外部と試料及び試料台との熱の出入りをより完全に遮断するためには、A の温度を試料及び試料台とほぼ等しくなるように制御することが必要であるが、この理由を述べよ。
- 5) 試料及び試料台と外部との熱の出入りが遮断され、温度が時間によらず一定になっているとき、ヒーターに 1.0 mA の電流を 10.0 秒間流したところ、温度は $1.0 \times 10^{-1} \text{ K}$ 上昇し一定になった。また、他の条件は同じで、容器から試料のみを取り外し、同じ温度で一定になっているとき、ヒーターに $400 \mu\text{A}$ の電流を 5.0 秒間流したところ、温度は $1.0 \times 10^{-1} \text{ K}$ 上昇し一定になった。測定温度での 1 g 当たりの試料の比熱を求めよ。なお、使用した試料の重さは 2.0 g 、ヒーターの抵抗は 5.0Ω とする。
- 6) 固体の比熱を測定すると、比熱を温度の関数として表した曲線にショットキー異常と呼ばれる山が観測されることがある。この比熱を互いに独立な N 個の同種の粒子からなる系で考える。各粒子は二つの状態のみを取り得る。一つはエネルギーが 0 で、もう一つはエネルギーが Δ である。ボルツマン定数を k_B として、この系の定積比熱 C_V を温度の関数として求めよ。

物理学一般

問題 5

γ 線が物質に入射した場合、 γ 線は物質との相互作用（光電効果、コンプトン散乱および電子対生成）により、そのエネルギーを失う。

γ 線を測定する検出器のひとつとして、プラスチックを用いたプラスチックシンチレータがある。プラスチックを構成している物質の原子番号は小さいため、 γ 線を測定すると光電ピーク（光電効果によるもの）は観測されず、コンプトン散乱による連続スペクトルが観測される。

コンプトン散乱は、本来は自由電子による γ 線の弾性散乱である。プラスチックの中に存在する原子の或る原子軌道に束縛されている電子（軌道電子）は、その束縛エネルギーが入射 γ 線のエネルギーに比して無視できる程度ならば、自由電子として取り扱うことができる。

図1は 0.511MeV のエネルギーの γ 線をプラスチックシンチレータで測定した一例である。このスペクトルは、コンプトン散乱によって生じた反跳電子の運動エネルギーがプラスチックの原子に与えられた事により生じたもので、連続的であることを示している。なお、0.3MeV 付近にピークが観測されている。

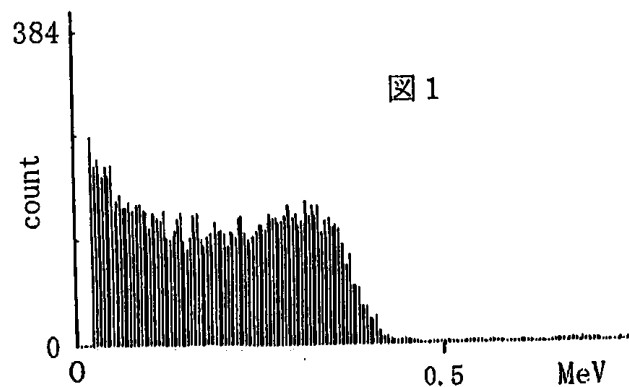


図 1

図2に示すように、 γ 線の入射方向と散乱方向とのなす角を ϕ 、反跳電子の方向とのなす角を θ とする。また、入射 γ 線および散乱後の γ 線のエネルギーをそれぞれ $h\nu$ 、 $h\nu'$ 、反跳電子の運動エネルギーを T とする。さらに、電子の静止質量を m 、反跳電子の速度の大きさを v とし、 $\beta \equiv v/c$ とするとき、以下の問いに答えよ。

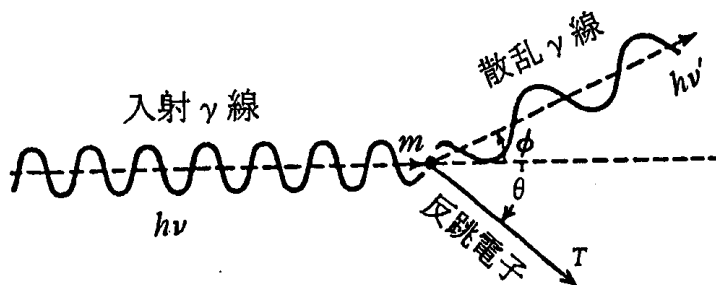


図2 コンプトン散乱

- 1) この時、散乱前後におけるエネルギー保存および運動量保存を表す式を $h\nu, h\nu', \phi, \theta, m, c$ および β を用いて示せ。但し相対論的に考えること。
- 2) 反跳電子の運動エネルギー T は、問1) で得られた関係式を解くことによって求められる。以下では、 γ 線のエネルギーが $h\nu = mc^2 = 0.511\text{MeV}$ の場合を考える。すると T は

$$T = \left\{ \frac{1 - \cos\phi}{2 - \cos\phi} \right\} h\nu \quad (1)$$

と簡単な式で与えられる。

- a) T の最大値 T_{\max} および最小値 T_{\min} を $h\nu$ を用いて表せ。またそれぞれの場合の γ 線の散乱角 ϕ を示せ。
- b) γ 線の微分断面積 $d\sigma/d\Omega_\gamma$ はクライン - 仁科によって求められたが、ここでは簡単のため、等方的 ($d\sigma/d\Omega_\gamma \equiv \sigma_0 = \text{constant}$) であると仮定する。このとき反跳電子のエネルギー分布 $d\sigma/dT$ は

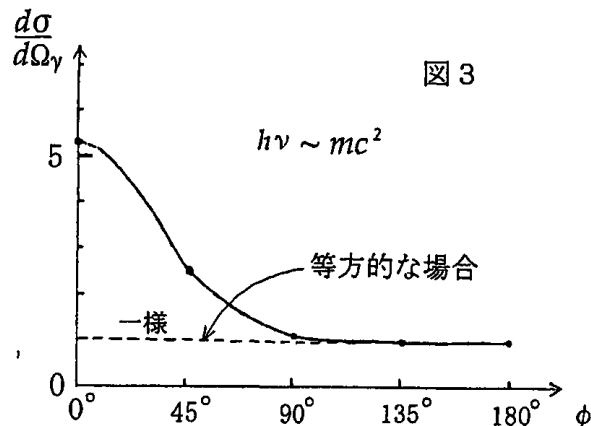
$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{2\pi\sigma_0}{h\nu} (2 - \cos\phi)^2 \quad (2)$$

で与えられることを示せ。

- c) この反跳電子のエネルギー分布 $d\sigma/dT$ を T の関数として求めよ。
- d) この反跳電子のエネルギーがプラスチック内の原子に与えられる訳であるが、そのエネルギー分布 $d\sigma/dT$ の概略 (絶対値は問わない) を T の関数として図に実線で示せ。

(横軸 T の単位としては、 MeV あるいは $h\nu (=0.511\text{MeV})$ のどちらでも良いが、必ず図に明記すること。)

- e) 問b) では、 γ 線の微分断面積 $d\sigma/d\Omega_\gamma$ を等方的であると仮定したが、実際の微分断面積は、図3に示されるように等方的ではない。但し、図3の縦軸は適当な単位を用い、 $\phi = 180^\circ$ における $d\sigma/d\Omega_\gamma$ の値を1に規格化した。等方的であるという仮定をはずした場合、 $d\sigma/dT$ は T の関数として、どの様になると考えられるか (但し、絶対値は問わない)。考察した内容を記し、 $d\sigma/dT$ の概略を問d) の答えの図中に破線で記入せよ。



英語

問題1と問題2は別々の解答用紙に解答せよ。

問題1

次の英文はアメリカ物理学会が20世紀の物理学を振り返って記した文章の一部である。これを読んで1)～5)の問いに答えよ。

A look back over a century of physics reveals an era of vigorous growth, not only in depth and scope, but also in sheer volume. The membership of the American Physical Society, for example, increased 400-fold from about a hundred in 1900 to over forty thousand in 1997. In part this growth reflects ballooning university enrollments, but it is also a symptom of the evolution of the scientific enterprise from a genteel academic pursuit into a robust component of the world's economy.

The story of the transistor illustrates the transformation. Life without computers is now as unthinkable as a computer without miniaturized transistors. Those, in turn, are products of a vast applied research effort at university and industrial laboratories that was rooted in pure, basic research.[1] The lineage of today's laptop leads straight back to Werner Heisenberg's discovery of quantum mechanics in 1925.

Turning to the coming century, and trying to anticipate the future directions of science, it helps to remember that the great discoveries are rarely the outcomes of deliberate searches for universal answers, but more often the unanticipated dividends of careful research focused on modest, specific questions.[2] Nearly four hundred years ago, for example, the German astronomer Johannes Kepler struggled for four years to remove a tiny discrepancy in the calculated orbit of Mars – and discovered the laws that govern the motion of all planets in the universe. In this century, Ernest Rutherford was investigating the details of the passage of charged particles through matter, when he hit upon the atomic nucleus. In the 21st century the passionate pursuit of particular problems will likewise yield wonderfully unexpected universal insights.

And what are the profound insights physicists could hope for? We may soon know dark matter is, and whether the universe will continue to expand forever, but how did time begin? General Relativity teaches us what gravity is, but where does mass – which measures inertia even in the absence of gravity – come from? How should we describe turbulence, the chaotic swirl of liquids and gasses that has defied mathematical physicists for a century? If we know, would we be able to predict weather patterns and

heart attacks? Can consciousness be explained in terms of electrical currents in neural networks, and possibly quantum mechanics, or is there more to it? [3] For that matter, do we have to accept the strange laws of quantum mechanics without question, or will someone discover the clue that makes the quantum obvious, as Albert Einstein never stopped hoping?[4] How did life begin? Are we alone in the universe? Until we can answer such questions with confidence, we cannot claim to have understood the world.

Looking back we realize that we have learned much in this century, but of mysteries there is no end. The most impenetrable of them all is to predict what the next discovery will be. [5]

- 1) 下線部[1]を和訳せよ。
- 2) 下線部[2]を和訳せよ。
- 3) 下線部[3]を和訳せよ。
- 4) 下線部[4]を和訳せよ。
- 5) 下線部[5]を和訳せよ。

問題 2

次の 1) ~ 5) の一連の文章を英訳せよ。

- 1) この論文の著者は金属中の電気抵抗の機構について新しい理論を提唱した。
- 2) この問題は多くの物理学者の興味をひいた。
- 3) 彼のアイデアを確かめるため、低温でさまざまな物理量の測定が行われた。
- 4) これらの実験結果は理論値と非常によく一致した。
- 5) そのため、この分野のほとんどの研究者がこの結論に賛成している。