平成１６年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物　理　学　専　攻

筆　記　試　験　問　題

《平成１５年８月２６日（火）・２７日（水）実施》

東北大学大学院理学研究科物理学専攻

電磁気学

問題 1 と問題 2 は別々の解答用紙に解答せよ．

問題 1

半径 a の球殻上に，電荷が軸対称に分布している．球殻の中心を座標原点にとり，対称軸 (z 軸) から測った角度を θ とすると，この電荷の面密度 $\sigma(\theta)$ は，θ の関数として

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta \tag{1}$$

で与えられるものとする．(σ_0 は定数である.) 球殻の厚さは無視できるとして，次の各問に答えよ．

1) 球殻内部の任意の点 $\boldsymbol{r}$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めるために，球殻の代わりに，半径 a の 2 つの球を考え，それぞれの球の内部には一定の電荷密度 ρ，$-\rho$ で電荷が一様に分布しているものとする．この 2 つの球を，中心間の距離が微小な距離 ℓ $(0 < \ell \ll a)$ だけ隔てて置く．このとき，次の各問に答えよ．

   a) それぞれの球の中心を z 軸上の $z = \ell/2$，及び $z = -\ell/2$ に置いたとき，この系の電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ を求めよ．

   b) $0 < \ell \ll a$ の条件下では，2 つの球は重なり，近似的に一つの球とみなすことができる．この球の表面電荷密度が式 (1) の形で表されることを示し，σ_0 を ρ と ℓ を用いて表せ．

   c) 球殻内部の点 $\boldsymbol{r}$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ．

2) 式 (1) で与えられた表面電荷密度を持つ球殻が，外部の点 $\boldsymbol{r}$ につくる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ．

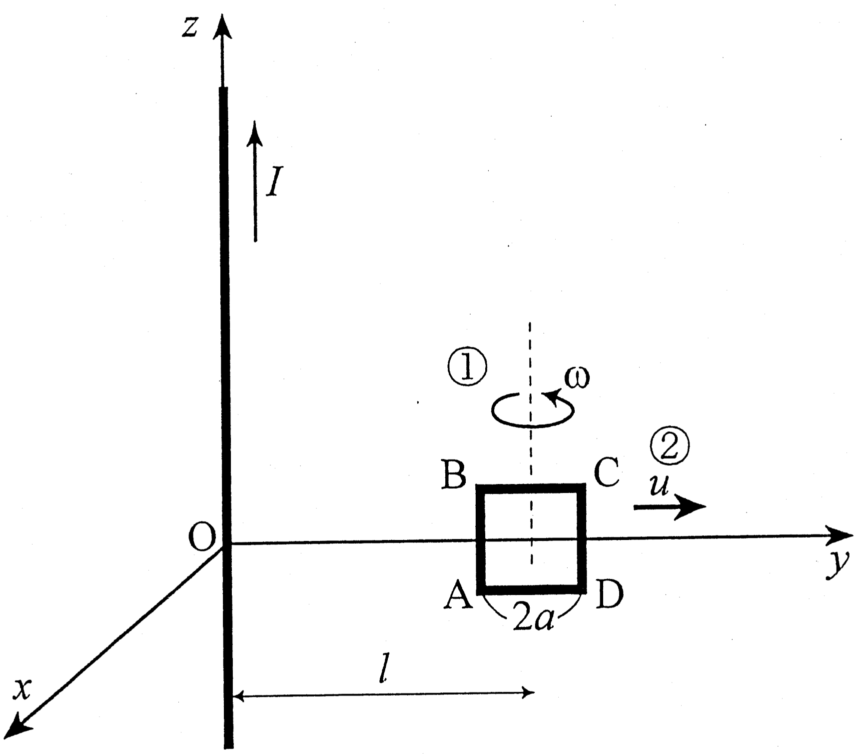
3) 球殻内部及び外部の電場の概略を図示せよ．ただし，$\sigma_0 > 0$ と仮定する．

4) 式 (1) で与えられた電荷分布をもつ系の静電エネルギーを求めよ．

電磁気

問題 2

下図のように，真空中で z 軸上にまっすぐ張った無限に長い針金に，強さ I の電流を z 軸の正の方向に流した．また，中心が y 軸上にあり，一辺の長さが $2a$ で全抵抗が R の正方形回路 ABCD がある．正方形回路の面は yz 面にあり，辺 BC 及び DA は y 軸に平行である．回路の自己誘導は無視し，真空の透磁率を μ_0 として以下の問に答えよ．



1）針金から距離 r の点での磁場について，磁束密度の大きさと方向を求めよ．

2）以下のそれぞれの場合について答えよ．

a) 正方形回路に強さ J の電流を ABCD の向きに流した．正方形回路の四辺を流れる電流をそれぞれ電流素片とみなし，それぞれが作る磁場を重ね合わせることにより座標軸の原点でこの回路が作る磁束密度の大きさと方向を求めよ．また，単位長さ当たりの針金に働く力について，原点での大きさと方向を求めよ．ここでは，原点から回路の中心までの距離を l とする．$l >> a$ とし，a/l に関して最低次までの計算で良い．なお，位置 $\vec{r}'$ にある電流素片 $J\Delta\vec{s}$ が位置 $\vec{r}$ に作る磁束密度はビオーサバールの法則から，

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{J\Delta\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}$$ となる．

b) yz 面にあった正方形回路を，図の①のように回路の中心を通り z 軸と平行な軸の周りに，一定の角速度ωで回転させた．回転開始時刻を $t=0$ として，回路に生じる起電力の時間変化を求めよ．ここでは，原点から回路の中心までの距離 l は a より充分大きく，回路内の磁束密度は一様として良い．

c) 正方形回路を，その面を yz 面に置きながら，図の②のように y 軸方向に一定の速さ u で針金から遠ざける．正方形回路の中心位置が $(0, l, 0)$ に達したときに回路に生じる起電力及び，回路を一定の速さ u で遠ざけるのに必要な単位時間当たりの仕事を求めよ．ここでは，$l>a$ ではあるが $l>>a$ とは限らないとし，回路内でも磁束密度が変化していることを考慮して答えよ．

熱・統計力学

問題１と問題２は別々の解答用紙に解答せよ．

問題１

１モルの理想気体をシリンダーとピストンからなる容器の中に閉じ込めた系がある(図１)．シリンダーとピストンの間には摩擦はないとする．またシリンダーの側面は断熱され，底面は必要に応じて熱を通したりさえぎったりできる．この系を図２に示すような２つの等エントロピー過程と２つの等積過程からなる四角形にそって図中に示す向きに準静的に変化させるとき，以下の設問に答えよ．

解答に際しては必要に応じて１から４の各状態における理想気体の絶対温度を記号 T_i（iは１から４）で表わせ．また過程 1→2 ならびに 3→4 におけるエントロピーにはそれぞれ記号 S_{H}，S_{L}を，過程 2→3 ならびに 4→1 における体積にはそれぞれ V_1，V_2を用いること．

なお，理想気体１モルのエントロピーSは次の式で表わされる：

$$S = c_v \log\left(\frac{T}{T_0}\right) + R\log\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_0.$$

ここでT，Vはそれぞれ理想気体の絶対温度と体積，T_0，V_0ならびにS_0はそれぞれ基準として選んだ状態の温度，体積ならびにエントロピー，c_v（温度によらず一定）とRはそれぞれ理想気体の定積モル比熱と気体定数である．また，断熱変化においては理想気体の圧力pと体積Vの間に$pV^{\gamma}=$ 一定　（γ は比熱比）の関係がある．

1) 状態１から２への変化に際して理想気体がする仕事をT_1とT_2を用いて表わせ．
   またこのとき気体が外部とやりとりする熱量はいくらか．
2) 状態２から３への変化で気体が放出する熱量はいくらか．
3) 熱機関の熱効率 η は

$$\eta = \frac{\text{1サイクルの間に熱機関がなした正味の仕事}}{\text{熱機関が吸収した熱量}}$$

   で定義される．図１で示した系を熱機関と考えた場合の熱効率をT_1，T_2を用いて表わせ．
4) T_3をT_2，S_{H}およびS_{L}を用いて表わせ．
5) 図２に示したサイクルを，横軸をTに変えた場合についてグラフ（概形でよい）にし，状態の変化する方向を書き込め．
6) １サイクルを完結したとき系がなした仕事をS_{H}，S_{L}，T_1およびT_2を用いて表わせ．

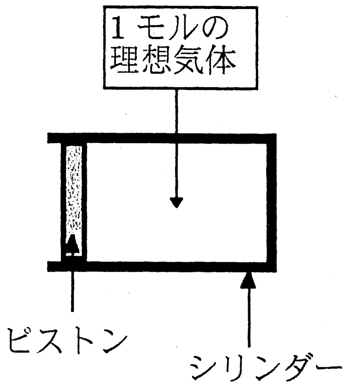


図1

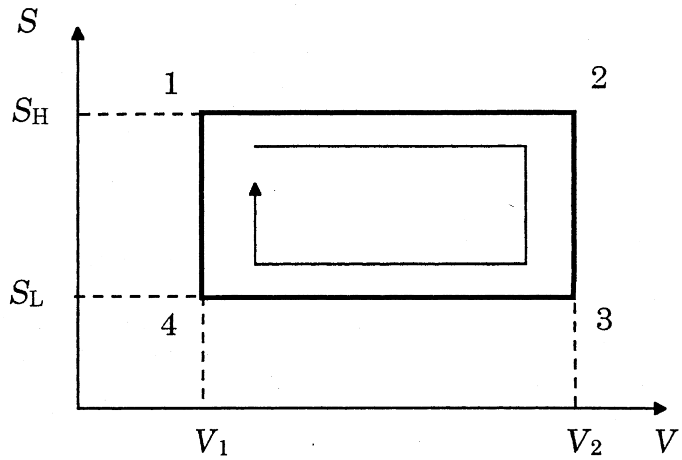


図2

熱・統計力学

問題2

スピン量子数 s を持つ N 個 $(N \gg 1)$ の磁気モーメントが大きさ H の一様な磁場中に置かれた系がある．磁場の方向を z 軸とすると，この系のゼーマンエネルギーは以下のハミルトニアンで与えられる．

$$\mathcal{H} = -\mu H \sum_{i=1}^{N} s_i^z$$

μ は定数で，各磁気モーメントは s_i^z の固有値 $m_i = -s, -s+1, \cdots, s-1, s$ で指定される $2s+1$ 個の状態を取り得る．磁気モーメント間の相互作用は無視できるものとし，以下では 1) $s = \frac{1}{2}$ と 2) $s = 1$ のそれぞれの場合を異なる方法で考える．

1) $s = \frac{1}{2}$ の場合を考え，N 個の磁気モーメントは一様磁場以外に外界と接触を持たないものとして，以下の問に答えよ．

a) 全エネルギーが

$$E = \frac{1}{2}\mu H n, \qquad (n = -N, -N+1, \cdots, N-1, N)$$

となる微視的状態の数（統計的重率）W を n の関数として求めよ．

b) この系のエントロピー S を n の関数として求め，温度 T とエネルギー E の関係を導け．関係式

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$$

および，スターリングの公式 $\log N! \sim N \log N - N \quad (N \gg 1)$ を使ってよい．

c) 比熱 C を温度 T の関数として求め，$C(T)$ のグラフの概形を描け．ただし，負の温度領域は考えなくてよい．

2) $s = 1$ の場合を考え，N 個の磁気モーメントは温度 T の熱浴と熱平衡状態にあるものとして，以下の問に答えよ．

a) この系の分配関数 Z，及び自由エネルギー F を求めよ．

b) 磁場方向の磁化の平均値

$$M = \langle \mu \sum_{i=1}^{N} m_i \rangle$$

を求めよ．

c) 温度 T の関数としての帯磁率

$$\chi = \lim_{H \to 0} \frac{M}{H}$$

の高温における漸近形を求めよ．

力学

問題1

真空中に一様電場 $\mathbf{E}$ が存在するものとし，その中に，質量 m，電荷 q の荷電粒子を初速度 $\mathbf{v}_0$ で射出した場合の運動を考える．$\mathbf{E}$ と $\mathbf{v}_0$ が平行でなければ，荷電粒子の運動は両ベクトルを含む平面内での２次元的運動となる．そこで，この問題を２次元の力学として扱う．電場の方向に x 軸をとり，それと直交する軸を y 軸とする．この場合，電場は $\mathbf{E} = (E, 0)$ と表される．時刻 t における荷電粒子の位置を $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ とし，速度を $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ とする．ただし，ドットは時間に関する微分を表す．以下では次に示す初期条件の場合に議論を限定する：

$$\mathbf{r}(0) = (0, 0), \quad \mathbf{v}(0) \equiv \mathbf{v}_0 = (0, v_0).$$

問 1)，問 2) の問題では，荷電粒子の運動は非相対論的に扱うものとする．また，荷電粒子が加速度運動を行うと電磁波を放出するが，この効果は無視するものとする．

1) 次の文章の空白（$\boxed{}$）を適当な式または語で埋めよ．
（解答は空白に付けた記号 A ～ E と対照させて解答用紙に記入すること.）

荷電粒子に対する運動方程式は $\boxed{\text{A}}$ と表されるから，この微分方程式を初期条件を考慮して解くと，$x(t) = \boxed{\text{B}}$，$y(t) = \boxed{\text{C}}$ となる．これらの式から時間 t を消去すると運動の軌道を表す方程式 $\boxed{\text{D}}$ が得られる．この方程式で表される幾何学的図形は $\boxed{\text{E}}$ と呼ばれる．

2) 前問で議論した荷電粒子の運動を解析力学の立場から考えてみる．位置座標 $\mathbf{r} \equiv (x, y)$ を正準座標とした場合，それと正準共役な運動量を $\mathbf{p} \equiv (p_x, p_y)$ とする．この場合，荷電粒子の運動を規定するハミルトニアン $H = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \equiv H(x, p_x; y, p_y)$ は次のように表される：

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r}).$$

ただし，$U(\mathbf{r}) \equiv U(x, y)$ は荷電粒子のポテンシャルエネルギーを表す．

a) $U(x, y)$ を書き下せ．

b) 前問 a) の結果を用いると，この系は２個の独立な保存量（運動の恒量）を持つことが分かる．独立な保存量の選び方は様々あるが，そのうちの一組を具体的に式として書き表せ．

3) 荷電粒子の速さ $v \equiv |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ が光速 c に近づくと，荷電粒子の運動は相対論的に扱わなければならない．この場合の荷電粒子の運動を規定するのは，次に示す相対論的ハミルトニアンである：

$$H_{\mathrm{rel}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = c\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}^2} + U(\mathbf{r}).$$

a) 荷電粒子の運動に関するハミルトンの運動方程式（正準運動方程式）を書き表せ．

b) この運動方程式を用いて，運動量の絶対値 $p \equiv |\mathbf{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ と速さ v が関係式

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

により結ばれることを示せ．

c) 運動量 $\mathbf{p}(t) = (p_x(t),\, p_y(t))$ の初期値 $\mathbf{p}(0) = (p_x(0),\, p_y(0))$ を求めよ．

d) ハミルトンの運動方程式を解いて，時刻 t における荷電粒子の運動量 $\mathbf{p}(t)$ を求めよ．

e) 速度 $\mathbf{v}(t) = (v_x(t),\, v_y(t))$ を求めよ．

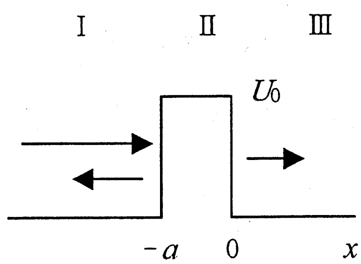
f) $v_0 = 0$ の場合について，荷電粒子の速度 $v(t)$ の時間依存性の概略をグラフとして図示せよ．その際，速度の特徴的な振る舞いを説明する物理量や方程式を図中に書き加えよ．

量子力学

問題１と問題２は別々の解答用紙に解答せよ.

問題１

１次元ポテンシャル問題を考える。ポテンシャル障壁に $x=-\infty$ から質量 m, エネルギーEの粒子が入射する．ポテンシャル$V(x)$ は



$$V(x)=\begin{cases} 0 & x\le -a & \text{領域 I} \\ U_0>0 & -a<x\le 0 & \text{領域 II} \\ 0 & x>0 & \text{領域 III}\end{cases}$$

と表される．ただし$0<E<U_0$ とする． 以下の問に答えよ.

1) I, II, III, それぞれの領域で Schrödinger 方程式を書け.

2) 波動関数 $\psi(x)$ は次のように表される.

$$\psi=\begin{cases} A\exp(ik_1x)+B\exp(-ik_1x) & x\le -a \\ C\exp(k_2x)+D\exp(-k_2x) & -a<x\le 0 \\ F\exp(ik_3x)+G\exp(-ik_3x) & x>0\end{cases}$$

定数 k_1, k_2, k_3 を, E, U_0, m を用いて表せ. ただし, A,B,C,D,F,G は x によらない定数である.

3) この問題では$G=0$ となる. この理由を述べよ.

4) 透過率Tと反射率Rを, A,B,C,D,F を用いて表せ.

5) F が次式で与えられることを示せ。

$$F=\frac{2k_1k_2\exp(-ik_1a)}{2k_1k_2\cosh(k_2a)+i(k_2^2-k_1^2)\sinh(k_2a)}A$$

6) 透過率Tを求めよ.

7) ポテンシャル障壁が十分厚く, $k_2a>>1$と近似できる場合について考える. ポテンシャル障壁の厚さが$a/2$の時の透過率T'を, 障壁の厚さaの透過率T, k_2, aを用いて表せ.

注）双曲線関数は次式で与えられる.

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

量子力学

問題 2

一次元の微小振動を行っている電荷 $e(>0)$，質量 M の質点について以下の問に答えよ．

1) 振動子の振動方向を x，質点に働くポテンシャル・エネルギーを $\frac{1}{2}Kx^2$ とするとき，この調和振動子のハミルトニアンは

$$H_0 = \frac{1}{2M}p^2 + \frac{1}{2}Kx^2$$

で表される．ここで p は x と共役な運動量である．関係式

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}\left(a^\dagger + a\right), \qquad p = i\sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}}\left(a^\dagger - a\right)$$

により演算子 a と $a^\dagger$ を導入することで，H_0 をこれらの演算子で記述することができる．ここで $\omega = \sqrt{K/M}$ である．

a) x と p との交換関係から a と $a^\dagger$ との交換関係を導け．

b) ハミルトニアンが $H_0 = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ と表されることを示せ．

c) $|n\rangle = (n!)^{-1/2}(a^\dagger)^n|0\rangle$ がハミルトニアンの固有ベクトルであることを示し，その固有値が

$$\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

であることを示せ．ここで $n = 0, 1, 2, \cdots, \infty$ である．また $|0\rangle$ は基底状態の規格化された固有ベクトルであり，$a|0\rangle = 0$ を満たす．

d) 任意の固有ベクトル $|n\rangle$ と $|m\rangle$ に対して，$\langle n|x|m\rangle$ を求めよ．ここで c) で定義された $|n\rangle$ は規格化されていることを用いてよい．

2) 次に，この調和振動子に時間に依存する電場 $E(t)$ を x 方向に加える．このとき，電場と調和振動子との相互作用を記述するハミルトニアンは $H_1(t) = -eE(t)x$ で与えられる．ここで $E(t)$ は

$$E(t) = \begin{cases} E_0 \sin\Omega t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

と与えられ，$t = 0$ における系の状態を $|n_0\rangle$ とする．ただし，$\Omega > 0, \Omega \neq \omega$ かつ $n_0 \geq 1$ とする．

a) 時刻 t における波動関数を

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)|n\rangle e^{-i\varepsilon_n t/\hbar}$$

と表す．このとき $c_n(t)$ に対する運動方程式は次式で与えられることを示せ．

$$\dot{c}_n(t) = (i\hbar)^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\langle n|H_1(t)|m\rangle c_m(t)e^{i\omega_{nm}t}$$

ここで $\omega_{nm} = \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{\hbar}$ とする．

b) 電場の大きさ E_0 が十分小さいとき，$c_n(t)$ は E_0 のべき級数として $c_n(t) = c_n^{(0)}(t) + c_n^{(1)}(t) + c_n^{(2)}(t) + \cdots$ と展開することができる．ここで $c_n^{(l)}(t)$ は E_0 の l 次のべきに比例するものとする．このとき $c_n^{(1)}(t)$ は次式で与えられることを示せ．

$$c_n^{(1)}(t) = (i\hbar)^{-1} \int_0^t \langle n|H_1(t')|n_0\rangle e^{i\omega_{nn_0}t'} dt'$$

c) 上式を具体的に計算することで，時刻 t (≥ 0) で状態が $|n\rangle$ ($n \neq n_0$) に見出される確率 $|c_n^{(1)}(t)|^2$ を求めよ．

物　理　学　一　般

◎ 物理学一般は５問の中から、２問を解答する選択問題です。

◎ 問題番号１から問題番号５までの中から、２問を選択して別々の解答用紙に解答しなさい。

◎ 問題番号３、問題番号５は、それぞれ問題用紙が２枚になっています。

◎ 解答用紙には、受験番号を記入し、選択した問題番号を○で囲むこと。

物理学一般

問題 1

1) 2 次元の波動関数

$$\Psi_1 = N_1 \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]$$

を考える．ここで N_1 は規格化定数である．

a) 波動関数の規格化条件

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \Psi_1^*(x,y)\Psi_1(x,y)$$

を極座標 (r,θ) で書き直せ．ただし，極座標 (r,θ) とデカルト座標 (x,y) の関係は $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ で与えられる．

b) 規格化定数 N_1 を求めよ．

2) 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ．ただし，a, b は実数とする．

a) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

b) 行列 A について，2 次元の波動関数

$$\Psi_A = N_A \exp\left[-\frac{1}{2}(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$

を考える．この波動関数が規格化可能であるためには，a, b はどのような条件を満たす必要があるか．

c) 前問の波動関数 Ψ_A が規格化可能な場合について，規格化定数の比，N_A/N_1 を求めよ．ただし，N_1 は問題 1) で計算した規格化定数である．

d) 波動関数 Ψ_A で与えられる状態 $|\Psi_A\rangle$ について，xy の期待値 $\langle\Psi_A|xy|\Psi_A\rangle$ を求めよ．

e) 行列 A を n 乗した行列 A^n について，2 次元の波動関数

$$\Psi_{A^n} = N_{A^n} \exp\left[-\frac{1}{2}(x,y)A^n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$

を考える．ここで n は自然数である．この波動関数が規格化可能な場合について，規格化定数の比，N_{A^n}/N_1 を求めよ．

物理学一般

問題 2

物質の性質に関する 1~12 の文から **3 つ選び**，それぞれ 200 字程度の文章で説明せよ．解答では，各項目ごとに以下の点を考慮せよ．

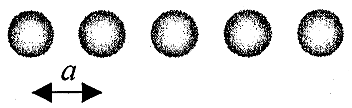
- どのようにして実験で観測するかを説明せよ．
- グラフや図を一つ以上入れ，図の注釈をつけよ．特にグラフの場合には，縦軸，横軸の意味を記せ．
- 必要な場合は式を用いよ．

1) 金属の電子比熱は温度に比例する．
2) 金属を自由電子気体と考えると，単位体積あたりの電子数からフェルミエネルギーの値が求められる．
3) シリコンにリンなどを微量入れると，浅い不純物準位ができる．
4) 固体のフォノンには，一般に光学モードと音響モードがある．また縦波と横波がある．
5) 半導体は低温になるほど電気が流れにくくなる．一方金属は高温になるほど電気が流れにくくなる．
6) p 型と n 型の半導体を接合すると整流特性があらわれる．
7) MOS (metal-oxide-semiconductor) 構造に電圧をかけると，MOS の静電容量が変化する．
8) 結晶に X 線を照射することによって，その構造を調べることができる．
9) 固体と光の相互作用によって，光の吸収や散乱がおきる．
10) 中性子を用いてフォノンの分散関係がわかる．
11) 超伝導体には，第一種超伝導体と第二種超伝導体がある．
12) 静磁場中におかれた磁気モーメントをもった物質に電磁波を照射すると共鳴吸収を起こす．

物理学一般

問題3

格子定数がaの1次元結晶格子を考える．この1次元格子において，s 軌道をもとにした強結合模型によるエネルギーバンドの分散関係は，近似的に　$E = E(k) = E_0 - 2t\cos(ak)$ と書ける．これを1次元強結合バンドと呼ぶ．これについて以下の設問に答えよ．ただし，トランスファーエネルギー　t は正とする．またエネルギーEの原点をバンドの底（$k = 0$）に取るため，$E_0 = 2t$ とせよ．必要ならば $\hbar = 1.1\times10^{-34}$ Js， $m_0 = 9.1\times10^{-31}$ kg， $e = 1.6\times10^{-19}$ C を用いよ．



1）バンドの分散関係を第1ブリルアンゾーン内で図示せよ．図上に，k と $E(k)$ の変域も明示せよ．

2）Γ点 $(k = 0)$ 近傍のバンド構造を自由電子モデル $E(k) = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$ で近似した場合の有効質量 m^* を必要なパラメータを用いて表せ．

3） $a = 0.30$ nm， $t = 0.50$ eV のとき，1次元強結合バンドの全バンド幅と2）の有効質量 m^* の値を求めよ．ただし，全バンド幅は電子ボルト単位で示し，m^* は電子の質量 m_0 で規格化した数値で示せ．

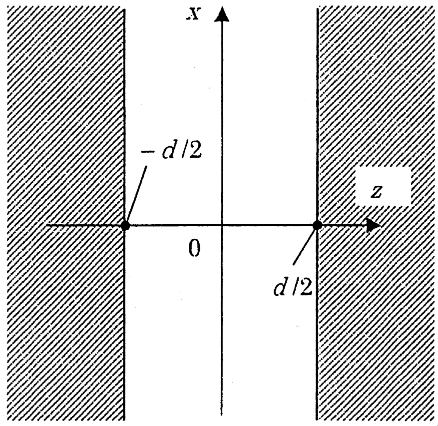
４）この１次元格子上に，１原子あたり $\frac{1}{2}$ 個だけ電子があるとする．このとき，フェルミエネルギー E_F を必要なパラメータを用いて表せ．さらに１）のバンドの分散関係の図に，このときの E_F の位置を書け．

５）電子の数が１原子あたり n 個の場合，フェルミエネルギー E_F を n で表せ．さらに，その関係を図示せよ．図には，n と E_F の変域も明示せよ．

６）前問５）のように，E_F は n の関数となるが，逆に n を E_F の関数と見ることもできる．ここで簡単のために，E_F を E と書くことにする．n を E で微分した $\frac{dn}{dE}$ は，単位エネルギーあたりの状態数（状態密度）$D(E)$ に一致する．電子の数が非常に少ない（$n \ll 1$）として，１次元強結合バンドに対して状態密度 $D(E)$ を計算せよ．

７）前問６）の場合について，$D(E)$ を E の関数として図示せよ．

問題4



平坦な表面をもつ非磁性金属平板（誘電率$\varepsilon_1 < 0$）が間隔dだけ離れて真空中（誘電率ε_0）で向き合っている．金属板は充分に厚いものとして，この系の電磁場のうち，最小の角振動数ω_0をもつモードを求めよう．図のようにx軸とz軸を定め、金属板間隙の中点に原点をとるものとする．y軸は紙面に垂直である．真空と金属の透磁率はどちらもμ_0とする．

1）$\vec{E} = (E(z)\sin\omega t, 0, 0)$, $\vec{H} = (0, H(z)\cos\omega t, 0)$とおいて，マックスウェル方程式

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

から$E(z)$と$H(z)$の満たす方程式を導け．

2）$E(z)$の満たす微分方程式を導き，真空中および金属中での解を求めよ．

3）$E(z)$の概形を図示せよ．

4）真空中および金属中における$H(z)$を求め，概形を図示せよ．

5）境界条件を考慮して最小の固有角振動数ω_0を決定する方程式を求めよ．

6）金属の誘電率を負の無限大として，最低固有解の角振動数ωを求めよ．

7）設問6）の条件が成り立つものとして，以下の物理量を有効数字1桁で求めよ．
必要ならば$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 3.0\times10^{8}$ m/s,　$h = 6.6\times10^{-34}$ Js,
$e = 1.6\times10^{-19}$ Cを用いよ．
a）間隔dが3mmのとき，電磁場の振動数$f_0 = \omega_0/2\pi$ (Hz).
b）間隔dが1μmのとき，電磁場の光子エネルギー (eV).

物理学一般

問題 5

点状原子核（電荷$+Ze$，質量M）の作るクーロンポテンシャル$U(r)$の中に電子（電荷$-e$，質量m_e）が1個束縛された水素様原子のエネルギー準位E_nと平均軌道半径r_nは，非相対論的モデルを用いると，n $(n=1, 2, \ldots)$を主量子数として，

$$E_n = -\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2 \frac{m_e Z^2}{2n^2} \quad , \qquad r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2 m_e Z} n^2$$

で与えられる．

以下では電子の代わりにミューオンμ^-（電荷$-e$，質量m_μ）が1個束縛された水素様ミュー原子を考える．　ミュー原子ではミューオンがエネルギー準位間を遷移する際に X 線が放出され，そのエネルギーから原子核の電荷分布に関する情報を得ることができる．

なお $m_e, m_\mu << M$ とし，数値が必要な場合は，素電荷 $e=1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，$\hbar c = 197\ \mathrm{MeV\cdot fm}$，微細構造定数$\alpha \equiv e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c) = 1/137$，電子質量$m_e = 0.5\ \mathrm{MeV}/c^2$，ミューオン質量$m_\mu = 100\ \mathrm{MeV}/c^2$，原子番号$Z=100$，原子核半径$R=10\ \mathrm{fm}$を用いること．　また，$1\ \mathrm{MeV} = 10^6\,\mathrm{eV}$，$1\ \mathrm{fm} = 10^{-15}\,\mathrm{m}$である．

1) ミュー原子のエネルギー準位 E_nと平均軌道半径 r_nの式を書け．

2) 基底状態と第一励起状態のエネルギー差 $\Delta E \equiv E_2 - E_1$ (単位 MeV)と，基底状態の平均軌道半径r_1（単位 fm）を有効数字1桁で概算せよ．

設問 2)からわかるように，原子番号が$Z=100$と大きな場合には，基底状態や低い励起状態に対するミューオンの平均軌道半径は原子核半径$R=10\ \mathrm{fm}$より小さいか同程度となる．つまりミューオンは原子核の電荷分布の中に存在する確率が高く，原子核の電荷分布を点状と考えるのは不適当である．このような状況下のミュー原子のエネルギー準位を考える為に，以下では点状原子核の代わりに電荷$+Ze$が半径Rの球内に一様分布した原子核のモデルを考える．

3) 原子核内部（$r \le R$）でのクーロンポテンシャル$\tilde{U}_i(r)$と原子核外部（$r \ge R$）でのクーロンポテンシャル$\tilde{U}_o(r)$を求めよ．

次に，このポテンシャル$\tilde{U}_i(r)$と$\tilde{U}_o(r)$を実線で，点電荷によるポテンシャル$U(r)$

を点線で，概略を図示せよ．なお，座標軸に具体的数字を与える必要は無い．

4) ミュー原子のエネルギー準位を得るには，ポテンシャルとして$\tilde{U}_{\mathrm{i}}(r)$と$\tilde{U}_{\mathrm{o}}(r)$を用いて解く必要があるが，ポテンシャルが rの全領域に対して$\tilde{U}_{\mathrm{i}}(r)$で与えられると仮定した場合のミュー原子のエネルギー準位$\tilde{E}_n$を求めよ．

なお，ポテンシャルが $V(r)=V_0+\dfrac{1}{2}kr^2$の形で与えられる 3 次元調和振動子のエネルギー準位 E_Nは，$\hbar\omega$を準位間エネルギー，$N\,(N=0,\,1,\ldots)$を主量子数として，$E_N=V_0+\left(N+\dfrac{3}{2}\right)\hbar\omega$で与えられる．

5) 基底状態と第一励起状態のエネルギー差 $\Delta\tilde{E}$ (単位 MeV)を有効数字 1 桁で概算せよ．

6) 設問 1)，2)はミューオンの分布が原子核の充分外側にある場合のモデル（点モデルと呼ぶ）に対応し，設問 4)，5)はミューオンの分布が原子核の充分内側にある場合のモデル（有限サイズモデルと呼ぶ）に対応する． 原子番号が大きい場合，有限サイズモデルでのエネルギー差 $\Delta\tilde{E}$ が点モデルでのエネルギー差 ΔE に較べて小さい理由を説明せよ．

英語

問題１，問題２，問題３はそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

問題1

次の英文[注1]を読んで設問 1) から 3) に和文で答えよ．

The historical importance of quantum mechanics lies not so much in the fact that it provided answers to a number of old questions about the nature of matter – much more important is that it changed our idea of the questions that we are allowed to ask. For Newton's physicist successors, physical theories were intended to provide a mathematical machine that would allow physicists to calculate the positions and velocities of the particles of any system at all future times from a complete knowledge (never of course realized in practice) of their values at any one instant. But quantum mechanics introduced a completely new way of talking about the state of a system. In quantum mechanics we speak of mathematical constructs called wave functions that give us information only about the probabilities of various possible positions and velocities. So profound is this change, that physicists now use the word "classical" to mean not "Greco-Roman," [注2] or "Mozart, etc.," but, rather, "before quantum mechanics".

If there is any moment that marks the birth of quantum mechanics, it would be a vacation taken by the young Werner Heisenberg in 1925. Suffering from hay fever, Heisenberg fled the flowering fields near Göttingen for the lonely North Sea island of Helgoland. Heisenberg and his colleagues had for several years been struggling with a problem raised in 1913 by Niels Bohr's theory of the atom: why do electrons in atoms occupy only certain allowed orbits with certain definite energies? On Helgoland Heisenberg made a fresh start. He decided that, because no one could ever directly observe the orbit of an electron in an atom, he would deal only with quantities that could be measured: specifically, with the energies of the quantum states in which all the atom's electrons occupy allowed orbits, and with the rates at which an atom might spontaneously make a transition from any one of these quantum states to any other state by emitting a particle of light, a photon.

[注1] "DREAMS OF A FINAL THEORY" by Steven Weinberg.
[注2] Greco-Roman: ギリシャ・ローマ（風）の

1) ニュートン力学と量子力学の違いに関する著者の意見を 100 字程度の文章で述べよ．

2) ハイゼンベルクがヘルゴラントを訪れた当時，ハイゼンベルクや仲間達が悩んでいた問題は何か，簡潔に記せ．

3) 原子中の電子の記述に関して，ハイゼンベルクは結局どのような方法論をとったか，その背景になった考えと共に，100 字程度で記せ．

問題2

以下の英文[注3]中、下線を施した部分1)から4)を和訳せよ.

The consequences of the theory of relativity are vast, profound, and unexpected. 1)In Einstein's way of thinking, the velocity of light appears as a universal constant, and its fundamental character transcends[注4] its historical connection to electromagnetism. 2)It relates space to time in the Lorentz transformation; it is the limiting velocity that cannot be exceeded in the transmission of signals; and it appears in the connection between velocity, energy, and momentum of a material point having at rest the mass m. This connection is given by the formulae $E = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ and $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. 3)The mass of bodies, defined as the ratio between force and acceleration, becomes variable with velocity. The conservation of mass is no longer a precise law and is substituted by a generalization of the conservation of energy, in which mass may transform into energy according to the formula $mc^2 = E$. 4)Modern physicists have even discovered massless "particles", the most notable being the light quantum. For these particles, $E = pc$, and they move with the speed of light with respect to any inertial system.

注3 "FROM X-RAYS TO QUARKS" by Emilio Gino Segrè
注4 transcend: 超える, 超越する

問題3

以下の文章を英訳せよ.

1) もし，ある時刻における太陽と惑星の位置と速度を知っていれば，ニュートンの法則を使って，すべての時刻における太陽系の状態を計算することができる.

2) 粒子の位置をより正確に測定しようとすると，その速度の測定はより不正確になる．その逆も真である.

3) 沢山の本を読み，世界中のいろいろな所に行って多くの専門家と議論することは，独創的な科学者になるために極めて有効である.

4) 放射線には，α線，β線，γ線の3種類がある．それらは，運動の方向に対して直角にかかった磁場中の軌跡によって区別される．例えば，γ線は電気的に中性なので，磁場では曲がらない.