

平成17年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期2年の課程入学試験

# 物 理 学 専 攻

## 筆 記 試 験 問 題

《平成16年8月30日 31日 実施》

東北大学大学院理学研究科物理学専攻

問題 1 と問題 2 は別々の解答用紙に解答せよ。

## 問題 1

$z$  軸の方向に無限に長くのびた半径  $r_0$  の円柱形状の導体（内部も導体で満たされている）があり，この円柱状導体の軸に垂直な方向に大きさ  $E$  の一様電場  $\mathbf{E}$  をかける．このとき，この導体の周囲の静電ポテンシャルおよび一様電場が円柱状導体に及ぼす力などを以下の手順で求めよう．

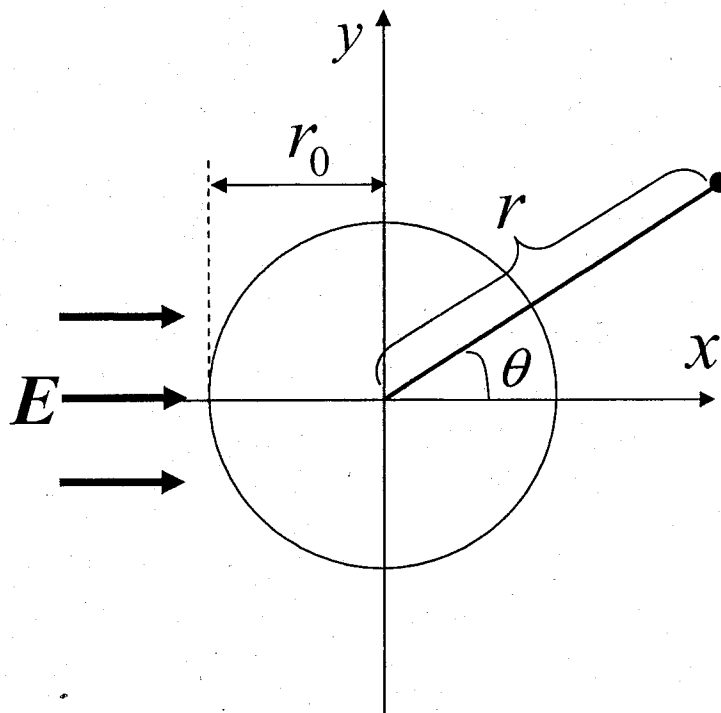


図 1 :  $z$  方向に無限に長くのびる円柱状導体を、軸に沿った方向から眺めた図。

1. 図のように2次元極座標  $(r, \theta)$  を用いることとし、一様電場  $\mathbf{E}$  の方向を  $\theta = 0$  の方向にとる。このとき、一様電場  $\mathbf{E}$  に対応する静電ポテンシャル  $\phi_1(r, \theta)$  を求めよ。
2. 円柱状導体により誘起される静電ポテンシャル  $\phi_2(r, \theta)$  は、導体の外部では2次元極座標  $(r, \theta)$  における Laplace 方程式

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0$$

の解として与えられる。ここで、

$$f(r, \theta) = R(r)T(\theta)$$

のような変数分離形を仮定することで、 $R(r)$  および  $T(\theta)$  が常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{d\theta^2} &= -\ell^2 T \\ r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} &= \ell^2 R \end{aligned}$$

を満たすことを示し、 $\ell \neq 0$  および  $\ell = 0$  のそれぞれの場合について一般解を求めよ。ただし、 $\ell^2$  は境界条件から決まる定数である。

3. 上で求めた解に適切な境界条件を課すことで、導体外部の全静電ポテンシャル  $\phi(r, \theta) \equiv \phi_1(r, \theta) + \phi_2(r, \theta)$  を求めよ。
4. 円柱状導体の表面に誘起される電荷密度分布  $\rho(\theta)$  を求めよ。
5. この円柱状導体の軸方向の単位長さの部分が一様電場  $\mathbf{E}$  から受ける力を求めよ。
6. 円柱状導体の外部および内部に生じる電場の概略を電気力線を用いて図示せよ。また、円柱が導体ではなく誘電体でできているとしたときの電場を、同じように電気力線を用いて図示せよ。図1のように、 $z$  軸に沿った方向から眺めたものを描くこと。

## 電磁気学

## 問題 2

完全導体とみなせる金属細線を単位長さあたりの巻数  $n$  で半径  $a$ 、透磁率  $\mu$  の十分長い鉄の円柱に密に巻いた長さ  $l$  のコイル  $C$  を考える。コイルに電流を流したとき、円柱からの磁束の漏れはなく、かつ円柱の端の効果は無視できるとする。また、円柱の抵抗は無視できるとする。さらに、円柱が回転してもコイルは回転しないとして以下の問いに答えよ。

1. コイルの自己インダクタンス (自己誘導係数)  $L$  を  $a, \mu, n$  および  $l$  を用いて表せ。
2. このコイル  $C$  を図1のように、半径  $b$ 、長さ  $r$  ( $r \gg b$ ) の円柱型抵抗と直列につないだ回路を考える。
  - (a) スイッチ  $S_1$  を閉じた後、十分に時間が経過した後の電流を  $I_0$  とする。このときコイル  $C$  に蓄えられている磁気エネルギーの大きさは  $(1/2)I_0^2 L$  で与えられることを示せ。
  - (b)  $I_0$  の電流が流れている状態で、時刻  $t=0$  に、スイッチ  $S_1$  を開くと同時にスイッチ  $S_2$  を閉じる。コイルの自己インダクタンスを  $L$ 、抵抗の抵抗値を  $R$  として、時刻  $t$  に回路に流れる電流  $I(t)$  を求めよ。
  - (c) 円柱型抵抗の断面に流れる電流分布は一様と仮定する。スイッチ  $S_2$  を閉じた後、時刻  $t$  では、円柱型抵抗の表面のすぐ内側でのポインティング・ベクトル  $\vec{S}$  の向きと大きさはどのようになるか求めよ。なお、 $\vec{S}$  は電場ベクトル  $\vec{E}$  と磁場ベクトル  $\vec{H}$  を用いて  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  で与えられる。さらに、 $t=0$  から  $t=\infty$  までの間に円柱型抵抗に流れ込む電磁場のエネルギーの総量は、コイル  $C$  に蓄えられていた磁気エネルギーに等しいことを示せ。

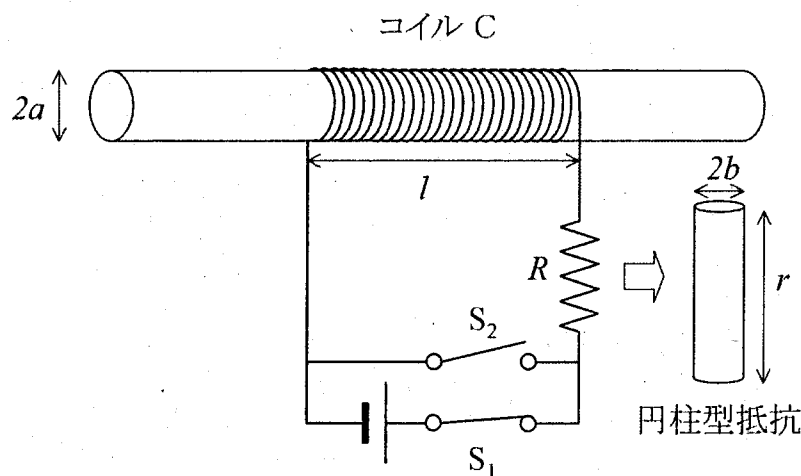


図1

3. 図2のように、円柱の中心軸を軸受けに置き、コイルCに電流  $I_0$  を流した後、円柱を角速度  $\omega$  で回転させる。このとき、円柱の中心軸と表面の間に抵抗値  $R_1$  を持つ抵抗を入れた回路に流れる電流を求めよ。

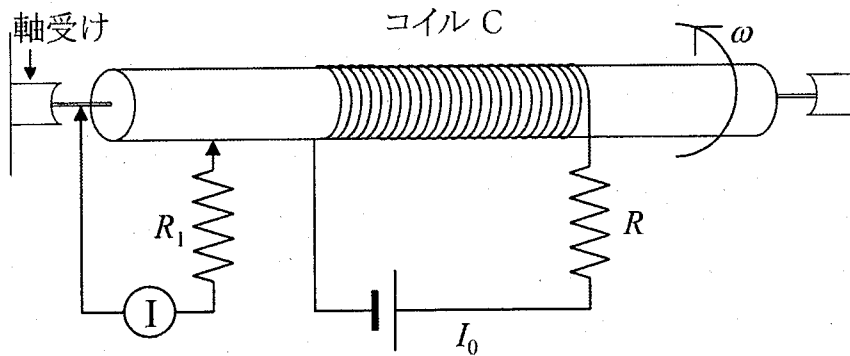


図2

4. 図3に示すように、コイルCのほかに、金属細線を円柱に全巻数  $N$  で密に巻いた自己インダクタンス  $L_2$  の新しいコイル  $C_2$  を導入する。このコイルの一端Aは、円柱に固定したリング状導体Fに結びつける。他端Bはリング状導体Fから延びた導線と結ぶとともに、それらの間に抵抗値  $R_2$  を持つ抵抗を入れる。

(a) コイルCには抵抗  $R$  と起電力  $V$  の直流電源をつなぎ、時刻  $t=0$  でスイッチ  $S$  を閉じる。二つのコイル間の相互インダクタンスを  $M$  として、 $t=0$  から  $t=\infty$  までの間にコイル  $C_2$  に流れる全電気量を求めよ。

(b) スイッチ  $S$  を閉じ、十分に時間が経過した後、コイル  $C_2$  の左側の端Bを引っ張ったところ、円柱は一定の角速度  $\omega_2$  で回転し、コイル  $C_2$  の巻線は単位時間あたり巻数  $m$  だけ減少しながら解かれていった。このとき、コイル  $C_2$  を含む閉回路の起電力はどうなるか述べよ。

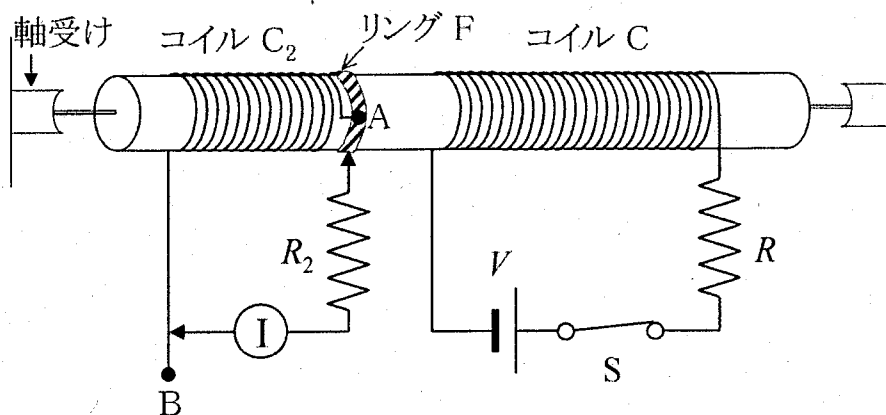


図3

## 熱・統計力学

問題 1 と問題 2 は別々の解答用紙に解答せよ。

## 問題 1

単一種類の理想気体を考える。この気体のモル数、絶対温度、圧力、体積、エントロピー、1モル当たりのギブス自由エネルギーをそれぞれ  $n$ ,  $T$ ,  $p$ ,  $V$ ,  $S$ ,  $g$  で表わす。この気体の量の変化まで考えた場合、内部エネルギー  $U$  の微小変化は次式のようにかける：

$$dU = T dS - p dV + g dn. \quad \dots \dots (1)$$

またこの気体のギブス自由エネルギー  $G$  とエントロピー  $S$  は、それぞれ下記の式で与えられる：

$$G = U - TS + pV, \quad \dots \dots (2)$$

$$S = n c_v \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + n R \ln \left( \frac{V}{V_0} \right) + S_0. \quad \dots \dots (3)$$

ただし  $c_v$  は定積モル比熱を、 $R$  は気体定数を、添え字ゼロは基準にとった状態に関する量を表わす。これらを用いて以下の問いに答えよ。

1.  $G$  の自然な独立変数は何か。
2. 図 1 に示すように  $n_A$  モルの理想気体 A (体積  $V_A$ ) と  $n_B$  モルの理想気体 B (体積  $V_B$ ) を温度、圧力を変えないようにして混合する。このとき混合気体のギブス自由エネルギー  $G_m$  が

$$G_m = U_A - TS_A + pV_A + n_A RT \ln \left( \frac{n_A}{n_A + n_B} \right) \\ + U_B - TS_B + pV_B + n_B RT \ln \left( \frac{n_B}{n_A + n_B} \right)$$

で与えられることを示せ。ただし  $U_A$  と  $U_B$  はそれぞれ混合前の A と B の内部エネルギーを、また  $S_A$  と  $S_B$  は同様にエントロピーを表わす。

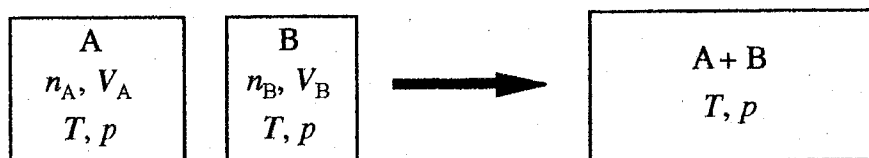


図 1:  $n_A$  モルの理想気体 A と  $n_B$  モルの理想気体 B の等温、等圧における混合。

3. 混合気体中における気体 A の 1 モル当たりのギブス自由エネルギー  $g_{mA}$  が

$$g_{mA} = \left( \frac{\partial G_m}{\partial n_A} \right)_{T, p, n_B}$$

で与えられることを使って  $g_{mA}$  の式を導け。ただし、気体 1 モル当たりの量は小文字で表わすこと。

4. 図 2 は、2. で述べた混合気体の入った容器と温度  $T$ 、圧力  $p$  の気体 A が入った容器がつながったものを示している。ただし、図にあるように 2 つの容器の境目には気体 A だけを自由に通し気体 B は全く通さない膜と、いずれの気体も通さない仕切りがあり、また容器、膜、仕切りは圧力で変形しないとする。気体の状態を乱すことなく仕切りだけを取り去った直後の気体 A の挙動を定性的に説明せよ。

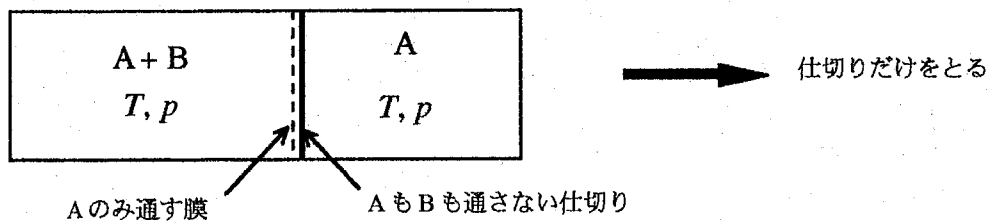


図 2 :  $n_A$ モルの理想気体 A と  $n_B$ モルの理想気体 B の混合気体 (温度  $T$ 、圧力  $p$ ) をそれと等温、等圧の気体 A と接触させる。2 つの容器間には A だけを自由に通し B は通さない膜と、A も B も通さない仕切りがある。

## 熱・統計力学

## 問題 2

温度  $T$ , 圧力  $P$  の気体を考える. この気体は, 単位体積当たり  $n$  個の分子からできた集合とする. 分子に働く重力等の力, および分子間の相互作用は無視できるとして, 以下の問いに答えよ.

1. この気体中の分子の質量を  $m$  とするとき,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  の速度をもつ分子の並進運動エネルギー  $E$  を表現せよ.

2. この気体の中で, 速度が  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  から

$\mathbf{v} + d\mathbf{v} = (v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z)$  の間にあるような分子の存在確率を  $f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$  で表す時,

$f(v_x, v_y, v_z)$  を導出せよ. ただし, エネルギー  $E$  の量子的

エネルギー準位の間隔は  $k_B T$  ( $k_B$  は Boltzmann 定数) に比べて十分狭いとする. 導出には,

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha^2 x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \text{ の関係式を用いよ.}$$

3. 上記の気体中に, 図 1 のように,  $x$  軸に垂直に平板を入れた時, 気体中の分子が, 単位面積, 単位時間当たりに, 平板の表面に衝突する個数  $J$  を導け. ただし, 導出には,

$$\int_0^{\infty} x \exp(-\beta x^2) dx = \frac{1}{2\beta} \text{ の関係式を用いよ.}$$

4. 気体を理想気体と考えた場合, 衝突個数  $J$  の圧力  $P$  に対する依存性が,

$$J = \frac{P}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \text{ となることを示せ.}$$

5. 次に気体中に気体と同じ分子からなる結晶平板があるとする. 圧力  $P$  の気相から結晶平板表面に入射した分子は, 表面で反射されることなく, すべて結晶表面に一旦付着し, その後あるものは離脱する. 単位面積当たりの離脱頻度は  $P$  によらず一定とする. 入射し吸着する分子数と離脱する分子数が釣り合っている状態を平衡状態と呼び, この時の圧力を  $P_0$  (平衡蒸気圧と呼ぶ) とすると,  $P > P_0$  の圧力下では離

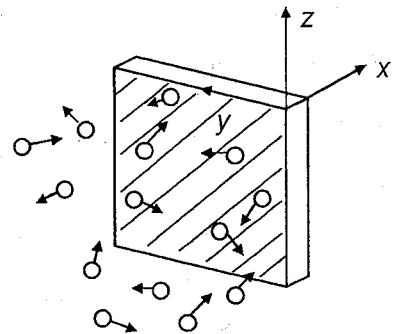


図 1



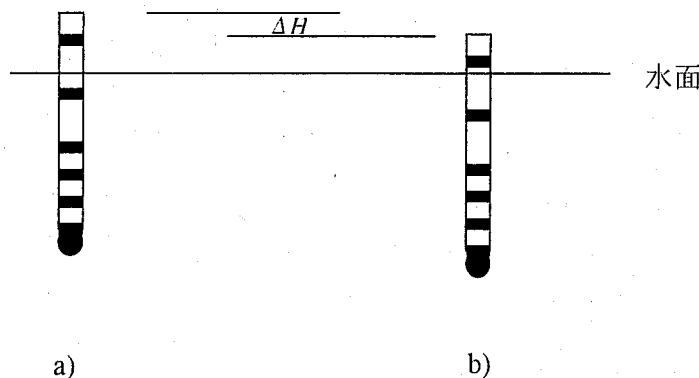
脱する分子数より付着し堆積する分子数が多いため結晶平板上に分子層が成長することになる。問4.で求めた関係を使い、圧力  $P$  の気相中の分子が結晶平板表面に入射するとき、付着成長する分子層の表面に垂直方向の成長速度  $V_m$  を平衡蒸気圧  $P_0$  を用いて求めよ。ただし、便宜上付着した分子は1個当たり一辺  $a$  の立方体を占有するとする。また、気相の圧力  $P$  は、成長の進行にかかわらず一定とする。

# 力学

静かな水面に図 a のように「浮き」が浮いている。この浮きの運動について答えよ。浮きを次のようにモデル化して考える。浮きは底面積  $S$ 、高さ  $H$  の円筒で、質量は  $m$  であり、浮きの下に大きさのない質量  $M$  のおもりが付いている。水の密度を  $\rho$ 、重力加速度を  $g$  とする。静かにおいた時は、浮きの  $3/4$  が沈んでいるとする。

浮きを図 b のように水の中に  $\Delta H$  だけ押し込んで静止した状態から静かに離す ( $\Delta H$  は微小量とする)。以下の問いに答えよ。ただし、上下方向を  $z$  軸とし、運動としては  $z$  方向の一次元のみを考えよ。

- 水の抵抗がなく波は立たないとすると、浮きは単振動する。単振動の角振動数  $\omega$  を求めよ。ただし、図 a での釣り合いを考慮して定数 ( $S, \rho, m, M, g, H$ ) のどれを使用しても良い。
- 次に水の抵抗を考える。粘性抵抗は浮きの水面下の長さ  $z$  と浮きの速度  $v$  の積に比例する (比例定数  $\kappa$ ) とする。
  - 粘性抵抗を考慮した時の浮きの運動方程式を書き下せ。
  - 浮きの振動の振幅が  $H$  に比べて十分小さいと近似した時、粘性抵抗はどのように書き表されるかを示し、上記運動方程式を書き直せ。
  - 問い 2-b の運動方程式を解き、粘性抵抗が大きい時と小さい時で定性的に解の様子が変わることを示せ。また、どのような運動をするかをグラフで示せ。グラフは正確である必要はないが特徴が分かるようにすること。また、粘性抵抗が大きいとか小さいとかの定義も各自示すこと (定性的に解の様子が変わる時の  $\kappa$  を求めて示しても良い)。
- さらに、問い 2-b に加えて、浮きを上下させる力を及ぼす波が存在していたとする。波の及ぼす力が時刻  $t$  において  $\text{Re}\{ f \exp(i\omega t) \}$  と書き表される時 ( $f$  と  $\omega$  は実定数)、十分時間が経つと浮きの運動は定常的振動になることを示せ。その時、振幅が最大になる波の角振動数  $\omega$  を求めよ。ただし、波の力も振幅も微小量として取り扱え。



## 量子力学

問題1と問題2は別々の解答用紙に解答せよ。

## 問題1

質量  $m$ , エネルギー  $E$  の粒子が1次元井戸型ポテンシャルの中を運動する。ポテンシャルは図1に示すように

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : |x| > a \\ -V_0 & : |x| \leq a \end{cases}$$

で与えられる。ただし,  $-V_0 < E < 0$  とする。波動関数を  $\psi(x)$  として以下の問いに答えよ。

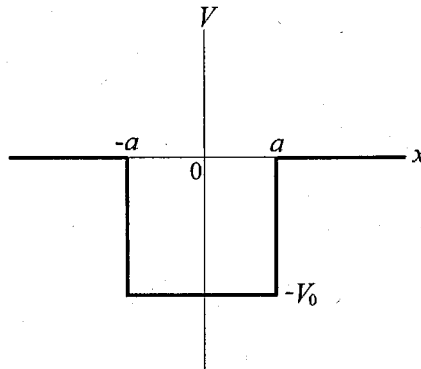


図1: 1次元井戸型ポテンシャル

- $|x| > a$ ,  $|x| \leq a$  のそれぞれの領域でのエネルギー  $E$  の固有状態に対するシュレディンガー方程式を  $m$ ,  $E$ ,  $\hbar$ ,  $V_0$  を用いて書け。
- $|x| > a$  におけるシュレディンガー方程式の一般解は,  $\kappa$  を正の定数として

$$\psi(x) = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x} \quad (1)$$

の形で与えられる。  $\kappa$  を求めよ。

- 式(1)において,  $x < -a$  の領域では  $B = 0$ ,  $a < x$  の領域では  $A = 0$  となる。その理由を述べよ。
- $|x| \leq a$  におけるシュレディンガー方程式の一般解を求めよ。
- ポテンシャルの境界  $x = \pm a$  において波動関数  $\psi(x)$  が満たすべき条件を述べよ。
- $x = \pm a$  における境界条件から固有エネルギーを決めるための条件式を求めよ。

# 量子力学

量-2/3

## 問題 2

時間によらない一様磁場  $B$  中におかれた, 質量  $m$ , 電荷  $e$  の粒子を考える. 磁場は  $x$  軸方向を向いており,

$$B = (B_x, 0, 0)$$

と与えられるものとする. ただし  $B_x$  は位置と時間によらない定数である. 以下の問いに答えよ.

1. まずスピン  $\frac{1}{2}$  の粒子を考える. 簡単のため粒子は静止しているとして磁場とスピンの間の相互作用のみに着目する. ハミルトニアンは粒子の磁気モーメントを  $\mu_S$ , スピン演算子を  $s$  として

$$H = -\mu_S s \cdot B$$

と与えられるものとする. 磁場中におかれた粒子のスピンの  $z$  軸に対して上向き, 下向きの状態をそれぞれ  $|\uparrow\rangle$ ,  $|\downarrow\rangle$  として, 任意の状態  $|\psi(t)\rangle$  を

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \langle \uparrow | \psi(t) \rangle \\ \langle \downarrow | \psi(t) \rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix}$$

で指定する. このとき  $\psi$  に作用する  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向のスピン演算子がそれぞれ

$$s_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となることを用いて, 以下の問いに答えよ.

- (a)  $|\psi(t)\rangle$  の規格化条件を  $\psi_+$  と  $\psi_-$  を用いて表せ.
- (b) 任意の状態に対して,  $s_z$  の期待値  $\langle s_z \rangle$  の絶対値が  $\frac{\hbar}{2}$  以下となることを示せ.
- (c)  $\psi_+(t)$  と  $\psi_-(t)$  の時間発展を記述する微分方程式を書け.
- (d) 時刻  $t=0$  において

$$\psi(t=0) = \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix}$$

であったとする. この後の  $\psi$  の時間発展を求めよ. ここで,  $A_{\pm}$  は定数である.

- (e) 時刻  $t=0$  に  $s_z$  の期待値が  $\frac{\hbar}{2}$  である状態を用意する. この状態の任意の時刻  $t$  における  $s_z$  の期待値を求めよ.

2. 続いて、磁場と軌道角運動量との相互作用を考える。簡単のため、粒子のスピンはゼロであるとする。この場合シュレディンガー方程式は、運動量演算子を以下のように置きかえて得られる：

$$-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}).$$

ただし  $c$  は光速、 $\mathbf{A}$  はベクトルポテンシャルである。

軌道角運動量演算子が位置演算子  $(x, y, z)$  と運動量演算子  $(p_x, p_y, p_z)$  を用いて

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x$$

と与えられることを用いて、以下の問いに答えよ。

- (a) 交換子  $[L_x, L_y]$  を計算し、結果を軌道角運動量を用いて表せ。  
 (b) 磁場中を運動する粒子のエネルギー準位は、 $B_x$  の一次までの近似で

$$E_i = E_i^{(0)} - \mu_L B_x \langle L_x \rangle$$

となることを示し、 $\mu_L$  を求めよ。ここで  $E_i^{(0)}$  は磁場がない時の  $i$  番目のエネルギー固有値、 $\langle L_x \rangle$  は  $E_i^{(0)}$  に付随したエネルギー固有状態についての  $L_x$  の期待値である。ただしベクトルポテンシャルは  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(0, -zB_x, yB_x)$  を用いることとし、またエネルギー固有値の縮退はないものとせよ。

## 英語

問題1, 問題2, 問題3はそれぞれ別の解答用紙に解答せよ.

### 問題1

次の英文<sup>注1</sup>を読んで設問1, 2に和文で答えよ.

In 1923, the young French nobleman Prince Louis de Broglie added a new element to the quantum fray<sup>注2</sup>, one that would shortly help to usher<sup>注3</sup> in the mathematical framework of modern quantum mechanics and that earned him the 1929 Nobel Prize in physics. Inspired by a chain of reasoning rooted in Einstein's special relativity, de Broglie suggested that the wave-particle duality applied not only to light but to matter as well. He reasoned, roughly speaking, that Einstein's  $E = mc^2$  relates mass to energy, that Plank and Einstein had related energy to the frequency of waves, and therefore, by combining the two, mass should have a wave-like incarnation<sup>注4</sup> as well. After carefully working through this line of thought, he suggested that just as light is a wave phenomenon that quantum theory shows to have an equally valid particle description, an electron - which we normally think of as being a particle - might have an equally valid description in terms of waves. Einstein immediately took to de Broglie's idea, as it was a natural outgrowth of his own contributions of relativity and of photons. Even so, nothing is a substitute for experimental proof. Such proof was soon to come from the work of Clinton Davisson and Lester Germer.

注1 "The Elegant Universe" by Brian Greene

注2 fray: 論争

注3 usher in ~: ~をもたらす

注4 incarnation: 姿

1. ド・ブロイが主張したことは何か, またそれはどのような推論に基づいているか. 本文中に書かれていることを簡潔に要約して述べよ.
2. ド・ブロイのアイディアに対するアインシュタインの反応はどうであったか. その理由とともに簡潔に述べよ.

## 問題 2

次の文は昨年「超伝導と超流動の理論への先駆的貢献」でノーベル物理学賞を受賞した、A. Abrikosov 博士, V. Ginzburg 博士, A. Leggett 博士の研究について紹介した記事<sup>注5</sup>の一部である。これを読んで1～3の問いに答えよ。

Three physicists who have wrestled with the explanations behind intriguing quantum phenomena share this year's Nobel Prize in Physics.

中略 .....

1) A superfluid forms when a fluid, such as liquid helium, effectively loses all of its viscosity<sup>注6</sup> and flows without any resistance. If that fluid is made up of electrons rather than atoms, the effect - electrical conductivity without resistance - is called superconductivity. Both phenomena depend upon all of the fluid's constituent atoms or 'free' electrons dropping into the same quantum state - something that happens only at low temperatures.

Superfluids are divided into more than one type of material and behavior. They were discovered in the 1930s, when helium-4 was cooled to very low temperatures and began to flow without resistance. It was later discovered, almost by accident, that helium-3 could also become a superfluid, although at a much lower temperature - about 1,000 times lower than that needed for helium-4. 2) This was difficult to explain, because helium-3 atoms belong to a class of particles known as fermions, which don't like to share the same quantum state. It was Leggett who, in the 1970s, succeeded in explaining how this happens: the atoms first form into pairs, which then act like single particles that can occupy the same quantum state.

Superconductivity had long been known also to depend on a similar pairing of electrons. 3) But until Abrikosov and Ginzburg's theory, building on work by a previous Nobel winner, Lev Landau, theorists struggled to explain the behavior of a class of superconductors, called 'type II', which can remain superconducting in the presence of a magnetic field.

<sup>注5</sup> "Super-cool theories secure physics prize", News in Nature, vol. 425 by Sarah Tomlin

<sup>注6</sup> viscosity: 粘性

1. 下線部 1) を和訳せよ.
2. 下線部 2) を文頭の This の意味がわかるように和訳せよ.
3. 下線部 3) を和訳せよ.

### 問題 3

以下の文章を英訳せよ.

1. 理想気体とは低濃度の極限で実現される相互作用のない原子からなる気体である.
2. 熱平衡においては, ある表面が輻射を放出する能力はその表面が輻射を吸収する能力に比例する.
3. 量子調和振動子は  $(n + \frac{1}{2})h\nu$  のように量子化されたエネルギーレベルをもつ. ここで  $n$  は整数,  $\nu$  は特性周波数,  $h$  はプランク定数である.
4. その試料の直径  $d$  と長さ  $L$  はそれぞれ 2.00 mm と 5.00 mm である. これらの値を式 (1) に代入すると,  $15.7 \text{ mm}^3$  という体積  $V$  を得る.



# 物 理 学 一 般

- ◎ 物理学一般は5問の中から、2問を解答する選択問題です。
- ◎ 問題番号1から問題番号5までの中から、2問を選択して別々の解答用紙に解答しなさい。
- ◎ 問題番号2、3、および問題番号5は、それぞれ問題用紙が2枚になっています。
- ◎ 解答用紙には、受験番号を記入し、選択した問題番号を○で囲むこと。

## 物理学一般

## 問題 1

$S$ 系 [座標  $(t, x, y, z)$ ] と  $S'$ 系 [座標  $(t', x', y', z')$ ] の間のローレンツ変換

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を考える。ここで、 $c$  は真空中の光速を表す。

1. (a)  $S$ 系で速度  $\vec{v}_1 = (v_1, 0, 0)$  で等速度運動をしている質点1は、 $S'$ 系では速度  $\vec{v}'_1$  で等速度運動をしているように見える。このときの速度  $\vec{v}'_1$  を求めよ。
- (b)  $S$ 系で速度  $\vec{v}_2 = (0, v_2, 0)$  で等速度運動をしている質点2は  $S'$ 系では速度  $\vec{v}'_2$  で等速度運動をしているように見える。このときの速度  $\vec{v}'_2$  を求めよ。

2.  $S$ 系で波動方程式

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - A^2 \nabla^2 \right] \phi(t, \vec{x}) = 0, \quad \text{ただし } A \text{ は実定数,}$$

を満たす波  $\phi$  を考える。この波動方程式を  $S'$ 系で書き表せ。また、この結果を用いて、この波動方程式がローレンツ変換のもとで不変であるために必要な条件を求めよ。

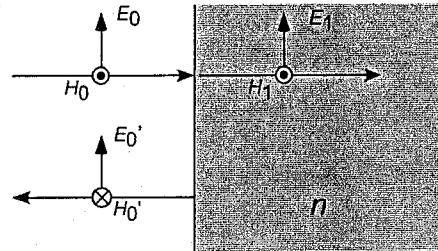
3.  $S$ 系で  $x$ 方向から角度  $\theta$  だけ傾いた方向に進行する角振動数  $\omega$  の電波を考える。この電波の  $S'$ 系での角振動数  $\omega'$  を  $\beta$  の関数として求めよ。とくに  $\theta = 0$  の場合と  $\theta = \pi/2$  の場合のそれぞれについて、関数  $\omega'(\beta)$  のグラフの概形を描け。ただし、 $\beta$  のとりうる値は  $-1 < \beta < 1$  の範囲とする。
4. 静止している自由電子に角振動数  $\omega$  の光子が衝突するコンプトン散乱を考える。衝突後の光子の角振動数を  $\omega'$  とし、衝突前後の光子の進行方向のなす角を  $\theta$  とする。電子の質量を  $m$  として以下の問いに答えよ。解答に際しては、相対論的效果を考慮するものとする。また、必要に応じて記号  $\hbar = h/(2\pi)$  ( $h$  はプランク定数) を使っても良い。
  - (a) この衝突前の電子と光子の持つエネルギーの合計を求めよ。
  - (b) 衝突後の電子のもつエネルギーを  $m, \omega, \omega'$  を用いて表わせ。
  - (c) 散乱後の光子の角振動数  $\omega'$  を  $m, \omega, \theta$  を用いて表わせ。

# 物理学一般

## 問題 2

光の反射について考察しよう。

まず右図のように真空中から平坦な界面をもつ物質（屈折率  $n$ ）に垂直に角振動数  $\omega$  の平面光波が入射している場合を扱う。一般的に光波の一部は透過，一部は反射される。電場，磁場と進行方向の関係から，右向きの波に関して磁場の向きは紙面の手前向き，左向きの波では紙面向こう向きとする。物質は非磁性体とし、透磁率は真空の透磁率  $\mu_0$  に等しいものとする。



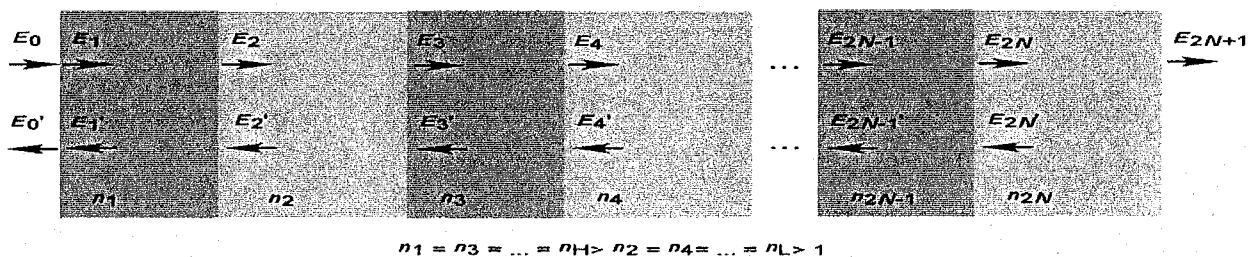
1. 界面における境界条件を用いて，入射波，反射波，透過波の電場  $E_0, E_0', E_1$  および磁場  $H_0, H_0', H_1$  の満たす関係を求めよ。
2. 屈折率  $n$  の媒質において，進行波に対しては電場と磁場の間に関係  $H = (n/c\mu_0)E$  が成り立つことを利用して，境界における振幅反射率  $r = E_0'/E_0$  が  $r = (1-n)/(1+n)$  となることを示せ。ただし， $c$  は真空中の光速である。真空中では  $n=1$  であることに注意せよ。

物質がガラスであるとすると屈折率は 1.5 程度なので，エネルギー反射率  $R = |r|^2$  は 4% に過ぎない。しかし屈折率のやや高い薄膜  $n = n_H$  とやや低い薄膜  $n = n_L$  を下図の様に交互に  $2N$  層積層させると ( $n_1 = n_3 = \dots = n_H > n_2 = n_4 = \dots = n_L > 1$ )，反射率を極めて高くできる場合があることが知られている。以下の手順で考察しよう。

$j$  層 ( $j=1, \dots, 2N$ ，屈折率  $n_j$ ) の中には矢印で示すように，右向きに進行する波と左向きに進行する波が共存する。第 0 層と第 1 層の境界における境界条件は

$$C_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n_j & -n_j \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_j = \begin{pmatrix} E_j \\ E_j' \end{pmatrix}$$

なる行列を用いて， $C_0 \vec{F}_0 = C_1 \vec{F}_1$  とあらわされる。



$j \geq 1$ の層ではそれぞれの膜の左端における電場を  $E_j, E_j'$  とすると膜の右端での電場は  $E_j \exp[ik_j d_j], E_j' \exp[-ik_j d_j]$  となる。ここで、 $k_j = n_j \omega / c$  は膜の中の波数、 $d_j$  は膜の厚さである。従って、 $j$  層と  $j+1$  層の界面における境界条件は行列

$$K_j = \begin{pmatrix} \exp[ik_j d_j] & \exp[-ik_j d_j] \\ n_j \exp[ik_j d_j] & -n_j \exp[-ik_j d_j] \end{pmatrix}$$

を用いて、 $K_j \vec{F}_j = C_{j+1} \vec{F}_{j+1}$  とあらわされる。

これらを用いると、たとえば第0層の電場と第3層の電場との関係は

$$\vec{F}_0 = C_0^{-1} C_1 K_1^{-1} C_2 K_2^{-1} C_3 \vec{F}_3$$

となる。

3.  $k_j d_j = \pi/2$  ( $j=1,2,\dots,2N$ ) の時、すなわち各層の厚さが物質内の波長の四分の一に等

しいとき、 $C_1 K_1^{-1} C_2 K_2^{-1}$  を求めて対角行列になることを示せ。

4. このような屈折率大 ( $n = n_H$ ), 小 ( $n = n_L$ ) のペアを十分に多く重ねたとき ( $k_j d_j = \pi/2$  ,

$j=1,2,\dots,2N$  で、 $N$  を大きくしたとき)、振幅反射率が  $-1$  に近づくことを示せ。(従ってこの時エネルギー反射率は1となる。) ただし、

$$\vec{F}_{2N+1} = \begin{pmatrix} E_{2N+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

であることに注意せよ。このような構造を誘電体多層膜鏡という。

5. 設問4. のときの電場の空間変化を図に描け。ただし各層の中で  $k_j d_j = \pi/2$  という条件

から屈折率の大きい物質層では膜厚が薄いこと、および境界条件に注意すること。

6. 以下の(a)と(b)からどちらか一方を選択して答えよ。

(a) 誘電体多層膜鏡の表面に、エネルギー  $\hbar\omega$  の電子励起状態をもつ原子が付着しているとす  
る。原子が基底状態にあるとき、鏡に垂直入射した光で原子を励起状態に励起する可能性  
について議論せよ。また原子が励起状態にあるとき、発光して基底状態に戻る可能性につ  
いて議論せよ。

(b) 誘電体多層膜鏡を作るためにはどうしたらよいか? 膜の作製法と厚さの評価法につ  
いて考案せよ。(物理的に可能であるかについて評価する。現実に行われている方法である  
かどうかは問わない。)

## 物理学一般

## 問題3

物質の定積比熱が内部エネルギーの温度微分で与えられることに注意し、固体および金属中の電子が示す比熱について以下の問いに答えよ。

## 1. 固体の比熱

(a) 固体を3次元調和振動子の集まりとする。古典統計力学によるとある温度  $T$  では、

エネルギー等分配則により、運動量と位置の自由度にそれぞれ  $\frac{1}{2}k_B T$  のエネルギーが分配される。ここで  $k_B$  はボルツマン定数である。調和振動子が  $N$  個あるとき、全自由度の数が  $2 \times 3N$  であることを用いて、内部エネルギー、および比熱の表式を求めよ。この古典論による比熱をデュロン-プティの比熱という。

(b) 実際の固体の比熱は低温でデュロン-プティの比熱から大きくはずれることが知られている。これを説明するために、固体内での調和振動子の振動数はすべて等しく、エネルギーは  $h\nu$  に量子化されているとする。ここで、 $h$  はプランク定数、 $\nu$  は振動数である。温度  $T$  では1つの振動子の平均エネルギーが  $\frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}$  で与えられることを用いて、固体の比熱を求めよ。これをアインシュタイン比熱と呼ぶ。

(c) 前2問で求めた、デュロン-プティの比熱とアインシュタイン比熱の温度依存性を両者の定性的違いが明確にわかるように図示せよ。

## 2. 金属中の電子が示す比熱

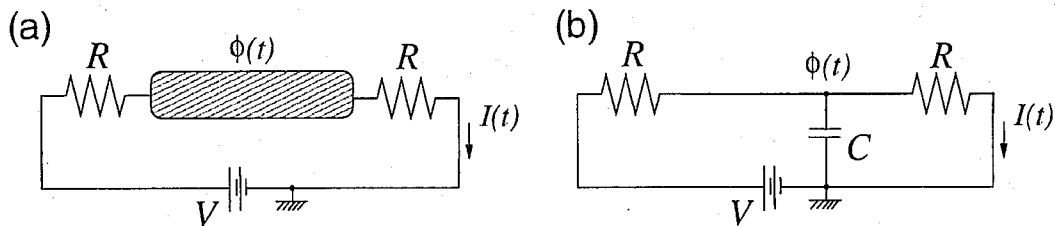
- (a) 金属中の自由電子の場合、問1.(a)と同様な古典論では、運動量のみエネルギーが等分配される。電子が  $N$  個存在する場合、古典論による電子比熱を求めよ。
- (b) 実際の電子比熱は、古典論から大きくはずれることが知られている。これを説明するために、電子がフェルミ縮退していることを考える。フェルミエネルギー  $E_F$  より十分低い温度  $T$  においては、 $E_F$  近傍のエネルギーを有する電子だけが熱エネルギー  $k_B T$  程度のエネルギーを獲得できることを考慮して、金属の電子比熱がどのような温度依存性を示すか求めよ。その際、係数の厳密さまでは要求しない。
- (c) さらに、問2.(a)と(b)で求めた比熱の温度依存性を、両者の定性的違いが明確にわかるように図示せよ。
- (d) 問1.(b)アインシュタイン比熱と問2.(b)の金属の電子比熱は、低温で温度依存性が異なる。この違いは、最低の励起エネルギーが有限の場合（アインシュタイン比熱）とゼロの場合（金属の電子比熱）の振る舞いの違いに帰着される。以下の例から2つをえらび、励起エネルギーが有限かゼロかを区別して、比熱の温度依存性について簡潔に説明せよ。
- ① 音響フォノンによる格子比熱（デバイモデル）
  - ② 2準位系の比熱（ショットキー比熱）
  - ③ 超伝導体の電子比熱

## 物理学一般

## 問題 4

非常に小さな金属棒 (図 (a) の斜線部) に電子が 1 個だけ入る現象を考える。この金属棒の静電容量を  $C$  とする。またこの小さな金属棒の両端は、2 つの抵抗  $R$  がついていて、全体の回路に電圧  $V$  が加わっている。図 (b) に等価回路を示した。電子の電荷を  $-e$  とし、接地している電位を 0 とする。また金属棒の抵抗は無視できるとして、以下の問いに答えよ。

必要なら以下の数値を用いよ:  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ ,  $\hbar = 1.1 \times 10^{-34} \text{Js}$  (プランク定数),  $k_B = 1.4 \times 10^{-23} \text{J/deg}$  (ボルツマン定数),  $\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$  (真空の誘電率)。



(a) 金属棒を含む回路と (b) その等価回路

- 時刻  $t = 0$  で金属棒 (コンデンサー) には電荷がたまっていない状態とする。  $t = 0$  で電圧を  $V = 0$  から  $V_0$  にした。時刻  $t > 0$  での金属棒の電位  $\phi(t)$  を求めよ。また右側の抵抗に流れる電流  $I(t)$  を求めよ。  $\phi(t)$ ,  $I(t)$  をグラフにかけ。
- 時間が充分に経つと、電位と電流は一定の値 ( $\phi_0, I_0$  とする) に近づくと考えられる。以下この状態を定常な状態と呼ぶことにする。定常な状態での  $\phi_0, I_0$  の値を求めよ。また、『充分に』とはどれぐらいの時間か、比較すべき時間 (時定数  $\tau$ ) を示して説明せよ。
- 電圧の値  $V$  が小さくて電子が 1 個だけ金属棒に入る状況を想定する。金属棒中の電子が 1 個はいると、静電エネルギーが  $e^2/2C$  だけ増加する。その分電位が定常な状態  $\phi_0$  より上昇する。この 1 個入ったときの電位と電源の電位  $V$  を比べて、電源の電位の方が低ければ電子が入らないであろう。これらの仮定がすべて正しいとして、電子が金属棒に入る最も低い電圧  $V_c > 0$  を求めよ。
- 実際には電子が 1 個入ったり出たりする現象であるので、  $\phi(t)$  等は時間的変動を伴うが、2. で求めた時定数  $\tau$  より急峻に変動することはできない。  $\tau$  を時間の不確定さ  $\Delta t$  とし不確定性関係からエネルギーの不確定さ  $\Delta E$  を求めよ。  $\Delta E < e^2/2C$  なら、前問の電子が入れなくなると考えられる。この不等式を用いて抵抗  $R$  がある値  $R_c$  よりも大きいことを導け。またその値を有効数字 1 桁で求めよ。
- 有限の温度  $T$  では電子は熱浴から  $k_B T$  のエネルギーをもらうことができる。静電エネルギーの値より大きい  $k_B T$  をもらおうと、  $V_c$  は意味を持たなくなる。温度  $T = 100\text{K}$  で  $V_c$  が意味を持つためには、静電容量の値はいくら以下でないといけないか有効数字 1 桁で求めよ。
- この問題は、ある大きさ以上の抵抗で、静電容量が問 5 で求めた値より小さいと、電子が金属棒に入れない状況があるということを示している。古典電磁気学では電荷の量は連続で、電圧電流も連続である。一方電子は素電荷をもち、量子力学では電子は波動関数の『波束』として運動することが知られている。以下の 2 つの課題から一つ選び、適当な図と 200 字程度で論ぜよ。科学的な議論では、数値的な評価や、適切な理由があることが必要である。

- この問題の現象を量子力学的にどのように理解したらよいか?
- これを実験で観測する場合、試料や装置をどう準備したらよいか?

## 物理学一般

## 問題 5

ニュートリノに関する基本的な事柄について、以下の問いに答えよ。指定がない場合は、自然単位系( $\hbar = c = 1$ )をとることとする。

1. 簡単のために一次元上での運動を考える。ある座標系  $S_1$  で観測したエネルギー、運動量がそれぞれ  $E_1$  および  $p_1$  のとき、 $S_1$  に対して相対速度  $\beta$  で運動している座標系  $S_2$  で観測されるエネルギー  $E_2$ 、運動量  $p_2$  は、

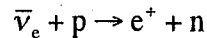
$$E_2 = \gamma E_1 - \gamma \beta p_1$$

$$p_2 = \gamma p_1 - \gamma \beta E_1$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

となる。このローレンツ変換において、 $E^2 - p^2$  が不変であることを示せ。

2. 反電子ニュートリノ  $\bar{\nu}_e$  の観測には、陽子との逆  $\beta$  崩壊反応



を使うことが多い。ここで  $p$  は陽子、 $e^+$  は陽電子、 $n$  は中性子である。

ニュートリノの質量を 0、陽子、陽電子、中性子の質量をそれぞれ  $M_p$ 、 $m_e$ 、 $M_n$  とし、陽子が静止している座標系（実験室系）での、この反応に必要な  $\bar{\nu}_e$  の最低エネルギーを  $M_p$ 、 $m_e$ 、 $M_n$  を使って表せ。

3. ニュートリノは質量の異なる状態が混合したものと考えられている。2種類のニュートリノ  $\nu_e$  と  $\nu_\mu$  を考え、これらが異なる質量  $m_1$ 、 $m_2$  の固有状態  $\nu_1$ 、 $\nu_2$  の混合で表せるとし、それぞれの状態を  $|\nu_e\rangle$ 、 $|\nu_\mu\rangle$ 、 $|\nu_1\rangle$ 、 $|\nu_2\rangle$  と書くとき、

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix}$$

の関係が成立する。ここで、混合角  $\theta$  は時間によらない定数である。

時刻  $t$  でのこの粒子の状態を  $|\nu(t)\rangle$  と書くと、時刻  $t=0$  で  $\nu_e$  が生成されるとした場合の初期状態は、



$$|\nu(0)\rangle = |\nu_e\rangle = \cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle$$

である。また、ニュートリノ質量がエネルギー  $E_\nu$  と比べて十分小さい場合は、ほぼ光速で伝搬し、伝搬距離  $L$  は  $L \approx t$  と近似できるので、 $|\nu_i(t)\rangle$  ( $i=1,2$ ) は、

$$|\nu_i(t)\rangle = |\nu_i\rangle \exp[-i(E_i t - p_i L)] \approx |\nu_i\rangle \exp\left[-i\left\{\left(p_i + \frac{m_i^2}{2p_i}\right)t - p_i L\right\}\right] \approx |\nu_i\rangle \exp\left[-i\frac{m_i^2}{2E_\nu}t\right]$$

に従って、時間発展（伝搬）する。これらを用いて、以下の設問に答えよ。

(a)  $|\nu(t)\rangle$  を  $|\nu_e\rangle$ ,  $|\nu_\mu\rangle$ ,  $m_i$ ,  $E_\nu$ ,  $t$ ,  $\theta$  を使って表せ。

(b) 距離  $L$  でニュートリノが  $\nu_\mu$  である確率  $\langle \nu_\mu | \nu(t) \rangle^2$  を  $\theta$ ,  $E_\nu$ ,  $m_i$ ,  $L$  を使って表せ。

(c)  $E_\nu = 5\text{MeV}$ ,  $m_2^2 - m_1^2 = 10^{-4}\text{eV}^2$  とした時、 $\nu_e$  である確率が最初に極小となる距離を有効数字2桁で求めよ。必要ならば、 $\hbar c = 197.3\text{MeV}\cdot\text{fm}$ ,  $c = 3.00 \times 10^8\text{m/s}$  を使っても良い。1MeVは $10^6\text{eV}$ , 1fmは $10^{-15}\text{m}$ である。

4. 地球内では、放射性物質の $\beta$ 崩壊により、 $\bar{\nu}_e$ が放出されている。簡単のために、地球を半径 $R$ の球とみなし、この球内で様に単位体積あたり $\rho$ 個/秒の $\bar{\nu}_e$ が等方的に放出されているとする。放出されたニュートリノは、ニュートリノ振動をせずに、反応による減衰も無視できるとする。そして、球の半径と比べて十分小さい観測装置を考え、標的陽子数を $N_p$ 、陽子のニュートリノに対する有効反応断面積を $\sigma$ とする。距離 $r$ 離れた微小体積 $\Delta V$ から放出されるニュートリノの、観測装置での反応率への寄与は、

$$\frac{N_p \sigma \rho}{4\pi r^2} \Delta V$$

である。

(a) 仮に球の中心点に観測装置があったとした時、そこで観測されるニュートリノ反応率を求めよ。

(b) 同様に、観測装置が球表面の一点にある時に観測されるニュートリノ反応率を求めよ。（ヒント：極座標の中心を観測装置にとると簡単である。）